जैन विश्वभारती संस्थान
लाडनूं - ३४१३०६ (राज.)

दूरस्थ शिक्षा निदेशालय

पाणस्स सारमायारो

वाणिज्य स्नातक-प्रथम वर्ष
Bachelor of Commerce

पंचम पत्र
Paper-V

व्यावसायिक सांख्यिकी
Business Statistics

Written By :
Dr. Govind Saxena (Section-A, B Hindi)
Dr. K.K. Gupta (Section-C,D Hindi)

Edition : 2015

Printed Copies : 200

Published By:
Jain Vishva Bharati Institute, Ladnun

अनुक्रमणिका (Contents)

खण्ड 'अ'

यूनिट 1

सांख्यिकी का अर्थ व परिभाषा, कार्य, महत्व, सांख्यिकी की सीमायें एवं अविष्वास

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़कर आप इस योग्य हो सकेंगे किः

- सांख्यिकी शब्द की परिभाषा बता सकें
- विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में अंतर कर सकें
- सांख्यिकी के विभिन्न कार्यों का वर्णन कर सकें
- विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकीय विधियों का महत्त्व स्पष्ट कर सकें
- सांख्यिकी विधियों की परिसीमाओं को समझ सकें
- सांख्यिकी में अविश्वास के कारणों को स्पष्ट कर सकें

प्रस्तावना

सांख्यिकी (Statistics) कोई नई विधा नहीं है, वरन् यह इतनी ही प्राचीन है जितनी मानवीय क्रियाएँ। परन्तु इस की उपयोगिता का क्षेत्र लगातार बढ़ता जा रहा है। प्राचीन समय में इसे ''शासन–कला का विज्ञान'' समझा जाता था तथा राज्य की प्रशासनिक क्रिया का उपोत्पाद समझा जाने के कारण इस का क्षेत्र सीमित था। उस समय में सरकार, प्रशासनिक उद्देश्य से, जनसंख्या, जन्म–मृत्यु आदि के अभिलेख रखती थी। वास्तव में आंग्ल भाषा के शब्द ''स्टेटिस्टिक्स'' (Statistics) की उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द 'स्टेटस' (Status) या इटालवी शब्द ''स्टेटिस्टा'' (Statista) अथवा जर्मन शब्द ''स्टेटिस्टिक'' (Statistik) से हुई है, जिन सभी का अर्थ ''राजनीतिक राज्य'' (Political State) है। आज सांख्यिकी विधियों का कृषि, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, व्यवसाय–प्रबन्ध आदि भिन्न–भिन्न क्षेत्रों में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। इस इकाई में आप सांख्यिकी की परिभाषा, विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में अंतर, सांख्यिकी के कार्यों, सांख्यिकी के महत्व तथा परिसीमाओं तथा सांख्यिकी पर अविश्वास का अध्ययन करेंगे।

सांख्यिकी का अर्थ

''सांख्यिकी'' शब्द का प्रयोग विभिन्न प्रकार से किया जाता है। यदा–कदा तथ्यों के संख्या संबंधी विवरणों या आँकड़ों (data) का उल्लेख करने के लिए बहुवचन के रूप में इसका प्रयोग किया जाता है। दूसरी ओर इस शब्द का प्रयोग एकवचन में गणित, अर्थशास्त्र आदि जैसे विषय के अध्ययन के रूप में भी प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, जब हम यह कहते हैं कि हमारे देश में संबंधित कुछ ''सांख्यिकी'' इस प्रकार हैं– भारत में प्रति 1,000 पुरूषों के लिए स्त्रियों की जनसंख्या 932 है, अथवा सामयिक मूल्यों पर आधारित प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय उत्पाद 1950–51 में 246 रु. से बढ़कर 2008–09 में 2,596 रु. हो गया है– तब हम सांख्यिकी शब्द का उपयोग बहुवचन अर्थ में (अर्थात् समंकों या आँकड़ों के अर्थ में) करते है। उक्त संख्याओं में व्यक्त विवरण को तैयार करने के लिए हमारे लिए उन विधियों तथा तकनीकों की जानकारी होना आवश्यक है जो आँकड़ों के संकलन, संघटन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा अर्थनिर्णय में प्रयोग की जाती हैं। इन विधियों तथा तकनीकों का अध्ययन सांख्यिकी विज्ञान कहलाता है।

इस संदर्भ में सांख्यिकी शब्द का प्रयोग एकवचन में है। इस अभिप्राय में सांख्यिकी विधियाँ या सांख्यिकी–विज्ञान। आइए, इन दोनों अर्थों का विस्तार से अध्ययन किया जाए।

बहुवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

अलग–अलग लेखकों ने सांख्यिकी को अलग–अलग प्रकार से परिभाषित किया है। वेबस्टर (Webster) के अनुसार ''समंक किसी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की स्थिति से संबंधित वर्गीकृत तथ्य हैं– विशेष रूप से वे तथ्य जिनको अंकों के रूप में अथवा किसी भी सारिणी या वर्गित पद्धति द्वारा प्रस्तुत किया गया हो।'' बाउले (Bowlay) के अनुसार, ''किसी अनुसंधान से संबंधित अंकों में व्यक्त किये गये उन तत्वों के विवरण को समंक या आँकड़े कहते हैं जिन्हें एक–दूसरे की तुलना में रखा जा सकता है।'' यूल तथा केण्डाल (Yule and Kendall) के अनुसार, ''समंकों से तात्पर्य उन संख्यात्मक तथ्यों से है जो पर्याप्त सीमा तक अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित होते है।'' उक्त परिभाषाएँ बहुत संकीर्ण हैं क्योंकि ये सांख्यिकी के क्षेत्र को उन्हीं तथ्यों तथा संख्याओं तक सीमित करती हैं जो रहने वाले व्यक्तियों की दशाओं से संबंधित हों और या फिर समंकों की कुछ विशिष्ट विशेषताएँ हों।

सांख्यिकी की अधिक व्यापक परिभाषा होरेस सेक्रिस्ट (Horace Sacrist) ने दी थी। उनके अनुसार सांख्यिकी से तात्पर्य ''तथ्यों के उस समूह से है जो अनेक कारणों से पर्याप्त मात्रा में प्रभावित होते है, जिन्हें अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिनकी गणना या अनुमान परिशुद्धता के एक उचित स्तर के अनुसार की जाती है, जिन्हें पूर्वनिश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित ढंग से संग्रह किया जाता है, तथा जिन्हें एक–दूसरे के तुलनात्मक रूप में रखा जाता है।'' यह परिभाषा व्यापक है तथा उन समस्त विशेषताओं का उल्लेख करती है जो संख्यात्मक तथ्यों (समंक) मे होनी चाहिए ताकि वे सांख्यिकी कहला सकें। आइए, अब हम इन विशेषताओं की एक–एक करके विवेचना करें।

क) **समंक तथ्यों के समूह होने चाहिए** : अकेली तथा असंबंधित संख्याएँ आँकड़े नहीं होती। उन्हें किसी विशेष अनुसंधान क्षेत्र से संबंधित तथ्यों के समूह का भाग होना आवश्यक है। उदाहरणार्थ, राम की मासिक आय 2,000 रु. है। यह एक सांख्यिकीय विवरण या समंक नहीं है। तथापि, यह कथन कि राम, मोहन तथा सोहन की मासिक आय क्रमशः 2,000 रु., 2,500 रु. तथा 3,000 रु. है, सांख्यिकीय समंक है।

ख) **समंक अनेक कारणों द्वारा प्रभावित होते हैं** : किसी समस्या/तथ्यों पर अनेक कारणों का प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु पर किया जाने वाला घरेलू व्यय अनेक कारणों जैसे, आय, रूचि, शिक्षा आदि द्वारा प्रभावित होता है। इसी प्रकार गेहूँ की उत्पादन मात्रा मिट्टी, बीज, वर्षा, तापमान आदि अनेक कारणों पर निर्भर करती है। इन तथ्यों से संबंधित आँकड़े। समंक कहलाते है। परंतु यदि हम एक से दस तक अंक तथा उनके वर्ग एक कागज पर लिख दें तो, एक से अधिक संख्याएँ होने पर भी उन्हें समंक नहीं कहा जा सकता। ये संख्याएँ अनेक कारणों द्वारा प्रभावित नहीं होती।

ग) **समंकों को संख्या में व्यक्त किया जाना चाहिए** : केवल संख्याओं में व्यक्त तथ्य–विवरण ही समंक कहलाते हैं। लक्षणों का गुणात्मक वर्णन जैसे, सुन्दरता, आँखों का रंग आदि प्रत्यक्ष रूप से मापे नहीं जा सकते। इसलिए सामान्यतया, वे समंक नहीं कहलाते। इन लक्षणों को संख्यात्मक रूप देकर ही समंक बनाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक विद्यालय में हम काले, नीले या भूरे रंग की आँख वाली लड़कियों की संख्या गिन सकते हैं।

घ) **समंक यथोचित परिशुद्धता के मानदण्ड के अनुसार प्रमाणित अथवा अनुमानित किये जाते हैं** : समंकों का प्रगणन या तो आगणन द्वारा किया जाता है या अनुमान द्वारा। परंतु यथोचित शुद्धता का मानदण्ड बनाए रखना अनिवार्य है। शुद्धता का स्तर अनुसंधान की प्रकृति तथा उस के उद्देश्य पर निर्भर करता है। कल्पना करें कि आप एक विद्यालय के प्रधानाचार्य के नाते बी.काम. में प्रवेश पाने वाले छात्रों के परिणाम निष्पादन के औसत स्तर को जानना चाहते हैं। इसके लिए आप को उन विद्यार्थियों के उच्च माध्यमिक स्तर पर

प्राप्त किए गये अंक अवश्य संकलित करने चाहिए। यह दो प्रकार से किया जा सकता है। पहले, आप विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की सूची तैयार कर उस की औसत ज्ञात कर सकते हैं। अन्यथा, यदि किसी कारण पूर्ण संगणना संभव नहीं है तो आप प्रतिदर्श (Sample) का चुनाव कर सकते हैं। प्रतिदर्श के आधार पर आप बाद में सभी विद्यार्थियों के परिणाम निष्पादन औसत स्तर का अनुमान लगा सकते हैं। इस प्रकार, समंक संगणना द्वारा अथवा अनुमान द्वारा प्रापत किए जा सकते हैं। आइए, एक अन्य उदाहरण द्वारा यथोचित/परिशुद्धता के मानदण्ड के अभिप्राय को समझें। यदि आप भारत के कुल खाद्यान्न उत्पादन का अनुमान, लाख टनों में, लगा रहे हैं, तो आप की उचित इकाई (या परिशुद्धता का स्तर) लाख टनों में होगी। परंतु, यदि आप स्वर्ण का कुल उत्पादन बतला रहे हैं तो आपकी उचित इकाई किलोग्राम हो सकती है। इस प्रकार परिशुद्धता का स्तर अनुसंधान की प्रकृति तथा उसके उद्देश्य पर निर्भर करता है।

ड़) **समंकों का संग्रह पूर्व–निर्धारित उद्देश्य के लिए व्यवस्थित ढंग से किया जाना चाहिए** : समंकों का संग्रह व्यवस्थित ढंग से होना चाहिए। अव्यवस्थित ढंग से संग्रहित समंकों से उद्देश्य सिद्ध नहीं होगा। समंकों के संग्रहण का उद्देश्य पूर्वनिर्धारित तथा स्पष्ट व निश्चित होना चाहिए। अनुसंधान का उद्देश्य स्पष्ट न होने पर या तो हम बहुत से अनावश्यक समंक कर लेंगे अथवा आवश्यक आँकड़े छोड़ देंगे।

च) **समंकों को एक–दूसरे से संबंधित रूप में रखा जाना चाहिए** : समंक कहे जाने के लिए संख्याओं में व्यक्त तथ्य तुलना के योग्य होने चाहिए। उदाहरणार्थ, किसी विशेष वर्ष में किसी वस्तु के उत्पादन तथा निर्यात संबंधी आँकड़े परस्पर संबंधित है। साथ–साथ लिखे जाने पर ही वे समंक हैं। परंतु यदि आपके पास तीन संख्याएँ हैं, जैसे– (1) 2006 में भारत में चावल का उत्पादन, (2) 2007 में संयुक्त–राज्य–अमेरिका में जन्मे बच्चों की संख्या तथा (3) 2008 में इंग्लैण्ड में पंजीकृत गाड़ियों की संख्या। तब उक्त संख्याएँ तथ्य भले ही हो, परंतु इकट्ठा रखने पर भी वे समंक नहीं कही जा सकती क्योंकि इन संख्याओं का परस्पर कोई संबंध नहीं है। अतः यह स्पष्ट है कि **सभी समंक तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं परंतु तथ्यों के सभी संख्यात्मक विवरण समंक नहीं होते।** उपरोक्त विशेषताओं के उपस्थित होने पर ही उन्हें संमक कहा जा सकता है।

एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

विवेकपूर्ण निर्णय के लिए संख्यात्मक सूचनाओं को संकलित, संगठित, प्रस्तुत, विश्लेषित तथा निर्वचित किया जाना चाहिए। ऐसा करने के लिए हमें ऐसी विधियों की आवश्यकता होती है जो इस कार्य में हमारी सहायता कर सकें। अतः **एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी शब्द से तात्पर्य विधियों के उस समूह से है जिसे समंकों के संग्रहण, विश्लेषण तथा निर्वचन या अर्थनिर्णय के लिए प्रयोग किया जाता है।** इस संदर्भ में भी अलग–अलग लेखकों ने सांख्यिकी की परिभाषा अलग–अलग की है। आइए, अब हम इन में से कुछ परिभाषाओं का वर्णन करें। उदाहरणार्थ, बाउले ने कई परिभाषाएँ दी हैं। परन्तु उन में से कोई परिभाषा भी व्यापक नहीं कही जा सकती। वास्तव में इन परिभाषाओं से हमें सांख्यिकी विज्ञान की प्रगति का आभास होता है। बाउले की कुछ परिभाषाऐं इस प्रकार हैः

i) सांख्यिकी को गणना का विज्ञान कहा जा सकता है।

ii) सांख्यिकी को अनुपातों का विज्ञान कहा जा सकता है।

iii) सांख्यिकी वह. विज्ञान है जो सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर, उसके सभी रूपों का मापन करता है।

क्रॉक्सटन तथा कॉउडन (Croxton and Cowden) ने सांख्यिकी की सरल तथा संक्षिप्त परिभाषा दी है। उनके अनुसार, ''सांख्यिकी को संख्यात्मक समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।''

सेलिगमेन (Selligman) द्वारा दी गई परिभाषा भी इतनी ही सरल परंतु व्यापक है। उनके अनुसार, ''सांख्यिकी वह विज्ञान है जिसका संबंध समंकों के संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना तथा निर्वचन की रीतियों से है जिनको किसी अनुसंधान–क्षेत्र पर कुछ प्रकाश डालने के लिए एकत्रित किया गया हो''। उपरोक्त पिछली दोनों परिभाषाएँ काफी सारगर्भित तथा व्यापक हैं तथा सांख्यिकी विधियों के क्षेत्र को स्पष्ट करती हैं।

सांख्यिकी विज्ञान हमें (1) समंकों के संकलन, (2) समंकों के वर्गीकरण तथा सारणीयन, (3) समंकों के प्रस्तुतीकरण, (4) समंकों के विश्लेषण तथा (5) समंकों के निर्वचन की विधियों तथा तकनीकों की शिक्षा देता है। उपरोक्त विवेचन से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सांख्यिकी शब्द या तो बहुवचन अर्थ में प्रयोग होता है, जहाँ उसका तात्पर्य समंकों या आँकड़ों से है, अथवा एकवचन अर्थ में प्रयोग किया जाता है जहाँ इसका अर्थ अनिश्चितता की स्थिति में बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लेने के लिए प्रयुक्त विधियों के रूप में किया जाता है।

विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (Descriptive and Inferential Statistics)

आपको विदित है, एकवचन में प्रयोग होने पर, सांख्यिकी शब्द से तात्पर्य उन विधियों तथा सिद्धांतों से है जो किसी अनुसंधान–क्षेत्र से संबंधित समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन में प्रयोग किए जाते हैं। ये विधियाँ तथा तकनीकें इतनी विविध हैं कि सांख्यिकीविद् प्रायः इन्हें दो वर्गों में बांटते हैं: (1) विवरणात्मक सांख्यिकी तथा (2) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी।

विवरणात्मक सांख्यिकी (Descriptive Statistics) : से तात्पर्य उन विभिन्न मापों से है जो समंकों की विशेषताओं के विवरण प्रस्तुत करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं। इन मापों में केन्द्रीय प्रकृति के माप, विचलन के माप आदि शामिल हैं। रेखाचित्रों, सारणियों तथा चित्रों द्वारा संमकों का निरूपण भी विवरणात्मक सांख्यिकी में सम्मिलित है। उदाहरणार्थ, यदि बी.काम. के विद्यार्थियों की संख्या 100 है और आप इन विद्यार्थियों के औसत अंक ज्ञात करते हैं, तो आप यहाँ विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं। इसी प्रकार, जब आप उसी कक्षा से प्रतिदर्श (Sample) द्वारा चुने 25 विद्यार्थियों के औसत अंक ज्ञात कर रहे हैं परतुं आप सम्पूर्ण कक्षा के लिए कोई सामान्यीकरण करने का प्रयास नहीं कर रहे, तो भी आप विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं।

निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (Inferential Statistics) : से तात्पर्य निर्देश समंकों के लक्षणों के आधार पर समग्र समंकों (population data) के संबंध में प्रामाणिक निष्कर्ष निकालने की सांख्यिकीय प्रक्रिया से है। सांख्यिकी में समग्र (population) शब्द से तात्पर्य जनगणना से न हो कर किसी अध्ययन क्षेत्र से संबंधित सभी इकाईयों से है। उपरोक्त उदाहरण में यदि प्राध्यापक प्रतिदर्श औसत अंकों के आधार पर कक्षा के सभी विद्यार्थियो के औसत अंकों का अनुमान लगाने का निर्णय ले तो हम कहेंगे कि वह निष्कर्षात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं। यह बात ध्यान देने योग्य है कि हम अधिकतर निर्देश समंकों के आधार पर ही समग्र समंकों के लक्षणों को समझने का प्रयास करते हैं। निर्देश निष्कर्षों के आधार पर समग्र के संबंध में ज्ञात निष्कर्षों में कुछ विभ्रम अथवा असंगति होना स्वाभाविक है। सम्भाव्यता सिद्धांत (probalility theory) के आधार पर ऐसे विभ्रम का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है।

बोध प्रश्न

1. क्या निम्नलिखित वक्तव्य सांख्यिकी समंक हैं? हां या नहीं में उत्तर दीजिये।

i) एक फैक्ट्री के 100 श्रमिकों की साप्ताहिक मज़दूरी। ....

ii) राम का कद 6 फुट है। ....

iii) मोहन का वज़न 70 किलोग्राम है, सोहन का कद 6.2 फुट है तथा राम की मासिक आय 1,500 रु. है। ....

iv) गत 10 वर्षों में कंपनी की ब्रिकी। ....

2. निम्नलिखित वक्तव्यों पर एक पंक्ति में टिप्पणी लिखिए।

i) वेब्सटर तथा सेक्रिस्ट ने विवरणात्मक सांख्यिकी की परिभाषा दी है।

....

ii) *यूल एवं केण्डाल द्वारा दी गई परिभाषा सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा में निहित है।*

....

iii) *सांख्यिकी के अंतर्गत गुणात्मक समंकों का अध्ययन नहीं किया जाता।*

....

iv) *सांख्यिकीय विधियाँ केवल समंकों के संकलन तथा विश्लेषण से संबंधित हैं।*

....

v) *बाउले द्वारा दी गई सांख्यिकी विज्ञान की परिभाषा सांख्यिकीय कार्य पद्धति के विभिन्न स्तरों पर प्रकाश डालती हैं।*

....

vi) *निष्कर्षात्मक सांख्यिकी निर्देश के अध्ययन से संबंधित है।*

....

उत्तर

1.

- *i) हाँ*
- *ii) नहीं*
- *iii) नहीं*
- *iv) हाँ*

2.

- *i) नहीं। उनकी परिभाषा आँकड़ों से संबंधित है।*
- *ii) हाँ*
- *iii) हाँ। प्रत्यक्ष रूप से नहीं, उनके परिमाणन के पश्चात्।*
- *iv) नहीं। कुछ अन्य पहलू भी हैं।*
- *v) हाँ*
- *vi) नहीं। वे निर्देशन से प्राप्त निष्कर्षों से समग्र संबंधी परिणाम ज्ञात करने की विधियाँ हैं।*

सांख्यिकी के कार्य

आप ने सांख्यिकी के अर्थ तथा परिभाषा का अध्ययन किया है। आप ने विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी के अंतर को भी समझा है। आइए, अब हम सांख्यिकी के कुछ महत्वपूर्ण कार्यों की परिचर्चा करें।

1. **तथ्यों को सही रूप में प्रयुक्त करना** : सांख्यिकी विधियाँ सामान्य कथनों को संक्षिप्त तथा निश्चित रूप में प्रयुक्त करती हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि भारत में कपास की औसत पैदावार 180 किलोग्राम प्रति हैक्टेयर है। यह कथन अधिक संक्षिप्त तथा प्रत्यायक हैं बजाय यह कहने के कि भारत में कपास की औसत उपज बहुत कम है।

2. **वृहत तथा जटिल समंकों को सरल बनाना** : सांख्यिकीय विधियाँ वृहत तथा जटिल समंकों को बोधगम्य बनाने के लिए उन्हें सरल बनाती हैं। अपरिष्कृत समंक प्रायः दुरूह तथा अबोधगम्य होते हैं। जब तक उन्हें किसी सामान्य लक्षणों के आधार पर वर्गीकृत न किया जाय तब तक उनके लक्षणों को समझना मुश्किल है। उदाहरणार्थ, आपको एक कारखाने में काम करने वाले 1000 श्रमिकों की साप्ताहिक मज़दूरी दी गई है।

आप के लिए उन समंकों में कोई निष्कर्ष निकालना तब तक असम्भव होगा जब तक उन्हें वर्गीकृत कर संक्षिप्त रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत न किया जाएः

साप्ताहिक मजदूरी (रु.)	श्रमिकों की संख्या
600 से कम	100
600–700	200
700–800	400
800–900	200
900 से अधिक	100
योग	1000

3. **तुलना करने हेतु तकनीक प्रदान करना :** सांख्यिकी का प्राथमिक उद्देश्य समय अथवा अन्तराल में विभिन्न समस्याओं के तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना है। उदाहरणार्थ, राष्ट्रीय आय का आगणन निरूद्देश्य नहीं किया जाता, परंतु यह जानने के लिए किया जाता है कि एक समय–अंतराल में जनता का जीवन–स्तर सुधर रहा है अथवा नहीं। उदाहरणार्थ, 2007 की तुलना में 2008 में भारत में प्रति–व्यक्ति आय 10 प्रतिशत बढ़ी है। इस सूचना के आधार पर हम 2008 में एक भारतीय के जीवन–स्तर पर कुछ प्रकाश डाल सकते हैं।

4. **विभिन्न क्षेत्रों में नीति बनाना :** सांख्यिकीय विधियों सामाजिक, आर्थिक तथा व्यावसायिक क्षेत्रों में नीति–निर्धारण में सहायक होती है। उदाहरणार्थ, जन्म–मरण के सांख्यिकीय समंकों के आधार पर राज्य सरकार परिवार–नियोजन कार्यक्रम चलाने में सफल होती है। इसी प्रकार, उपभोक्ता–मूल्य–सूचकांकों के आधार पर राज्य–सरकार अपने कर्मचारियों को महंगाई–भत्ता प्रदान करती है।

5. **विभिन्न तथ्यों के बीच संबंधों का अध्ययन करना** : सांख्यिकीय माप जैसे कि सह–संबंध तथा प्रतीपगमन विभिन्न चलों में परस्पर संबंध ज्ञात करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं। निष्कर्ष तथा निर्णय पर पहुँचने के लिए इस प्रकार के परस्पर संबंध महत्वपूर्ण हैं। उदाहरणार्थ, आप किसी वस्तु की माँग तथा उसके मूल्यों में परस्पर संबंध पाते हैं। सामान्यतः यदि किसी वस्तु का मूल्य बढ़ता है, तो उस वस्तु की माँग घटने की सम्भावना रहती है।

6. **भविष्य के मूल्यों का पूर्वानुमान करना** : कुछ सांख्यिकी विधियों का उपयोग चल के भविष्य के मूल्यों का पूर्वानूमान करने के लिए किया जाता है। पिछले दस वर्षों के विक्रय आँकड़ों के आधार पर एक विपणन–प्रबन्धक अपने उत्पाद की अगले वर्ष की सम्भावित माँग का अनुमान लगा सकता है।

7. **अनिश्चितता को मापना** : सम्भावित नियम की सहायता से आप किसी घटना के घटने की सम्भावना का पता लगा सकते है। निर्णय लेने में सम्भावित अवधारणाएँ काफी उपयोगी होती हैं। उदाहरणार्थ, यदि आप बी.काम परीक्षा में अपने उत्तीर्ण होने की संभावना जानने के इच्छुक हैं तो आप पिछले दस वर्षों के उत्तीर्ण–प्रतिशत का अध्ययन करके इसका अनुमान लगा सकते हैं।

8. **प्राक्कल्पना (hypothesis) की सत्यता की जाँच करना** : प्राक्कल्पना की सत्यता की जाँच करने तथा नये सिद्धांतों के प्रतिपादन में सांख्यिकीय विधियाँ अत्यधिक उपयोगी होती हैं। उदाहरणार्थ, एक कम्पनी मलेरिया–नियंत्रण के लिए निर्मित एक नई दवाई की प्रभावकारिता को जानना चाहती हैं। वह एक सांख्यिकीय तकनीक का उपयोग कर इसे ज्ञात कर सकती है जिसको काई वर्ग परीक्षा (Chi-Square Test) कहते हैं।

9. **प्रामाणिक निष्कर्ष निकालना** : अवलोकित तथ्यों तथा प्रतिदर्श समंक के आधार पर समग्र की विशेषताओं के संबंध में अनुमान लगाने के लिए सांख्यिकीय विधियाँ उपयोगी होती है।

सांख्यिकी सर्वेक्षण

जब हम एक सांख्यिकीय सर्वेक्षण (statistical survey) करते हैं, तो हमें कुछ चरणों को क्रमागत रूप (Sequential order) में सम्पन्न करना होता है। जब तक हम इन चरणों को व्यवस्थित रूप में सम्पन्न नहीं करते, हमें सर्वेक्षण का उपयोगी परिणाम नहीं मिल सकेगा। सांख्यिकीय सर्वेक्षण से संबंधित महत्वपूर्ण चरणों का, एक अनुक्रम के रूप में, नीचे प्रस्तुत किया गया हैः

1. समस्या को परिभाषित करना
2. उद्देश्य और क्षेत्र निर्धारित करना।
3. आँकड़ों के संग्रहण (collection of data) की प्रारम्भिक तैयारियाँ

   i) आँकड़ों का स्रोत (source of data)

   ii) अनुसंधान का प्रकार (type of enquirey)

   iii) सांख्यिकीय इकाई (statistical unit)

   iv) परिशुद्धता की मात्रा (degree of accuracy)
4. आँकड़ों का संग्रहण (coolection of data)
5. आँकड़ों का सम्पादन (editing of data)
6. आँकड़ों का वर्गीकरण और सारणीयन (classification and tabulation of data)
7. आँकड़ों का विश्लेषण (anylysis of data)
8. आँकड़ों का निर्वचन (interpretation of data)
9. रिपोर्ट लिखना (report writing)

आइये अब हम इन सभी चरणों के बारे में, संक्षेप में विचार करें।

1. **समस्या को परिभाषित करना** : प्रत्येक सांख्यिकीय सर्वेक्षण में, सबसे पहले हमें अन्वेषणीय समस्या का, बड़े ही स्पष्ट शब्दों में वर्णन करना होता है। समस्या की स्पष्ट परिभाषा करना परम महत्वपूर्ण हैं, क्योंकि इससे सुसंगत आँकड़ों को पहचानने में सहायता मिलती है। जैसा कि आप जानते हैं, सांख्यिकी (विज्ञान), संख्यात्मक रूप में व्यक्त, तथ्यों के समूह से संबंधित है। इसलिए, समस्या को परिभाषित करते समय, हमें मात्रात्मक मापन (quantitative measurement) की सम्भावना को सुनिश्चित करना चाहिए।

2. **उद्देश्य और क्षेत्र निर्धारित करना** : समस्या परिभाषित करने के पश्चात् अगला चरण सर्वेक्षण का उद्देश्य और क्षेत्र निर्धारित करना होता है। यदि सर्वेक्षण का उद्देश्य स्पष्टतः बताया गया हो, तो यह अभीष्ट सूचना एकत्रित करने में पथ–प्रदर्शक का कार्य करता है। यदि उद्देश्य का यथार्थतः वर्णन किया जाए, तो सर्वेक्षण के दौरान उत्पन्न होने वाली कई समस्याओं से निपटने के लिए, एक समान उपगम (uniform approach) अपना सकते हैं। सर्वेक्षण के क्षेत्र से अभिप्राय हैंः कार्यक्षेत्र और उसकी परिधि, अध्ययन काल, या समष्टि (population or items) या वे मद जिन के बारे में सूचना प्राप्त करनी हैं, संग्रह करने योग्य सूचना का प्रकार, इत्यादि। ये सभी, अन्वेषणीय समस्या और अध्ययन के उद्देश्य पर आश्रित है। अंतिम परिणाम की परिशुद्धता, उपरोक्त सभी तत्वों के ठीक–ठीक निर्धारण पर निर्भर होती है। अतः आपको अवश्यमेव यथार्थ रूप में सर्वेक्षण निर्धारित करना चाहिए।

3. **आँकड़े–संग्रहण के लिए प्रारम्भिक तैयारियाँ** : आँकड़ों के संग्रहण में प्रवृत्त होने से पूर्व, आपको निम्न प्रारम्भिक तैयारियाँ करनी चाहिए।

   i) **आँकड़ों का स्रोत** : आपको उन स्रोतों के बारे में, निश्चय करना चाहिए, जहाँ से आँकड़ों को संग्रहीत करना है। आँकड़ों के संग्रहण के लिए, दो उपागम हैंः (1) आप स्वयं आँकड़े एकत्रित करें, या (2) आप पूर्व–प्रकाशित स्रोतों से आँकड़े लें। उन आँकड़ों को, जो अनुसंधानकर्ता, स्वयं, पहली बार संग्रहीत करता है, प्राथमिक आँकड़े (primary data) कहते हैं। दूसरी ओर, यदि आप, किसी द्वारा संग्रहीत आँकड़ों का उपयोग करते हैं, तो ऐसे आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़े (secondary data) कहते हैं।

   ii) **अनुसंधान का प्रकार** : आपको किस प्रकार का अनुसंधान करना है यह निश्चय करना चाहिए। सांख्यिकीय अनुसंधान विभिन्न प्रकार के होते हैं, जैसे संगणना (census) या प्रतिदर्श (sample), प्रारम्भिक या आवृत्तीय (initial or repetitive), प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष, नियमित या तदर्थ (regular or ad-hoc), गोपनीय या अगोपनीय, सरकारी या गैर सरकारी इत्यादि। प्रस्तावित अध्ययन के लिए, अधिकतम उपयुक्त। अनुसंधान के प्रकार का निश्चय करते समय, निम्न तत्वों को ध्यान में रखना चाहिए। अनुसंधान का उद्देश्य और क्षेत्र, ग्राहक (client), आँकड़ों का स्रोत, इत्यादि।

   iii) **सांख्यिकीय इकाई को परिभाषित करना** : आपको, उस सांख्यिकीय इकाई (या इकाइयों) को परिभाषित करना चाहिए जिसके लिए आँकड़ों को एकत्रित करना है। इकाई उपयुक्त ओर अनेकार्थता रहित होनी चाहिए। यदि सांख्यिकीय इकाई, स्पष्टतः परिभाषित हो, तो हम गलत आँकड़ों के संग्रहण की संभावना से बच सकते हैं। एक बार, सांख्यिकीय इकाई निश्चित करने के पश्चात् समस्त अन्वेषण में, उसी इकाई का प्रयोग करना चाहिए।

   iv) **परिशुद्धता की मात्रा** : आपको, आँकड़ों के संग्रहण में, अभीष्ट परिशुद्धता की मात्रा भी निश्चित करनी चाहिए। सांख्यिकीय अनुसंधान में परम परिशुद्धता (absolute accuracy) यदि यह प्राप्य भी हो, तब भी कभी वांछनीय नहीं होती। ऐसा इसलिए है क्योंकि इसके प्रत्यन में, परिशुद्धता के अभीष्ट स्तर में प्रचुर वृद्धि के बिना ही, समय और धन अधिक व्यय होता है। परंतु आपको, संग्रहणनीय आँकड़ों के प्रकार और अनुसंधान के प्रयोजन को ध्यान में रखते हुए, एक समुचित (reasonable) परिशुद्धता स्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करना चाहिए।

4. **आँकड़ों का संग्रहण** : इन प्रारम्भिक तैयारियों को पूरा करने के पश्चात् अगले चरण में, आँकड़ों का वास्तविक संग्रहण करना होता है। आँकड़ों के संग्रहण की कई विधियाँ हैं। आप, उनमें से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं। विभिन्न उपादानों (factors) जैसे अध्ययन की प्रकृति, अन्वेषण का उद्देश्य और क्षेत्र, वित्तीय साधनों की प्राप्यता, समय की उपलब्धता, आदि का विचार करने के पश्चात् ही, आँकड़ों के संग्रहण की उपयुक्त विधि का निर्णय करना चाहिए।

5. **आँकड़ों का सम्पादन** : आँकड़ों के संग्रहण के पश्चात् अगला चरण एकत्रित सूचना की संवीक्षा (scrutiny) करना है। इसे आँकड़ों का सम्पादन करना (editing of data) कहते हैं। ऐसा करना इसलिए आवश्यक है, क्योंकि अकसर संग्रहीत आँकड़े अशुद्धियों और त्रुटियों से युक्त होते हैं परंतु सम्पादन के समय, हमें आँकड़ों में फेर बदल करने का प्रयत्न नहीं करना चाहिए।

6. **आँकड़ों का वर्गीकरण और सारणीयन** : संग्रहीत और सम्पादित आँकड़ों के समूह को, व्यवस्थित कर, एक सारणी (table) या सचित्र (chart/diagram) या रेखाचित्र (graph) के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इन्हें एक संहत (compact) रूप में, जिसे आवृत्ति बंटन (frequency distribution) कहते हैं, भी प्रस्तुत करते हैं। इनके द्वारा, हम आँकड़ों की प्रमुख विशेषताओं को ज्ञात करने में समर्थ होते हैं। आँकड़ों के वर्गीकृत और सारणीबद्ध होने पर, उनकी तुलना करना सरल हो जाता है।

7. **आँकड़ों का विश्लेषण :** अगले चरण में, आँकड़ों का, विभिन्न सांख्यिकीय मापों, जैसे माध्य अनुपात (averages), प्रतिशतता (percentages) और गुणाकों (coefficients) द्वारा विश्लेषण किया जाता है। अव्यवस्थित आँकड़ों के एक बड़े समूह में केवल आँकड़ों की तुलना करना सम्भव नहीं होता। परंतु जब इनको एक ऐसी संख्या के रूप में प्रस्तुत किया जाए जो पूर्ण रूप से आँकड़ों को एक व्यापक विचार प्रदान करती हो, तो तुलना करना सम्भव हो जाता है। ऐसे विभिन्न सांख्यिकीय माप हैं, जो आँकड़ों के विभिन्न लक्षणों का संक्षिप्त रूप में वर्णन करते हैं। आप बाद में इसी इकाई में, इनमें से कुछ विधियों के बारे में, विस्तार से अध्ययन करेंगे। सांख्यिकीय विधियों की एक लम्बी सूची में से, आपको केवल उन मापों का चयन करना चाहिए जो सर्वेक्षण के प्रयोजन में उपयुक्त हों।

8. **आँकड़ों का निर्वचन :** आँकड़ों का विश्लेषण करने के पश्चात्, हमें निष्कर्ष (inferences) निकालना होता है। इसे बड़ी सावधानी से करना होता है। अन्यथा, भ्रामक निष्कर्ष निकलने का भय रहता है। हम निर्वचन (interpretation) द्वारा ही, सर्वेक्षण के परिणामों को, व्यापक अर्थ दे सकते हैं। उपयुक्त निर्वचन द्वारा, संबंधों और प्रक्रियाओं को उभारा जा सकता है। जो सर्वेक्षण का आधार हैं।

9. **रिर्पोट लिखना :** सांख्यिकीय सर्वेक्षण का अंतिम चरण रिपोर्ट लिखना है। जब तक लिखित रिपोर्ट प्रस्तुत न की जाए, सर्वेक्षण कार्य अधूरा रहता है। यदि सर्वेक्षण के परिणामों को, प्रभावी रूप में, जन–साधारण तक न पहुँचाया जाए, तो सर्वेक्षण का प्रयोजन, ठीक से, पूरा नहीं होता। सर्वेक्षण के परिणामों का ज्ञान के सामान्य भंडार में अपरिवर्तनीय ढंग से समावेश होना चाहिए। ये सभी तथ्य, सर्वेक्षण रिपोर्ट लिखने के महत्व को दर्शाते हैं।

सांख्यिकीय आँकड़ों के स्रोत

जैसा कि आप जानते हैं समस्या परिभाषित करने और अनुसंधान के उद्देश्य तथा क्षेत्र को निर्धारित करने के पश्चात् अगला चरण है, उन स्रोतों के विचार में, आँकड़ों के दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता हैः (1) प्राथमिक आँकड़े (primary data) और (2) द्वितीयक आँकड़े (secondary data)।

उन आँकड़ों को, जिनका संग्रहण, आप पहली बार, अपने प्रयोग के लिए करते हैं, प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। यदि आप आँकड़ों का संग्रहण, पहली बार, मौलिक आँकड़ों के रूप में करते हैं तो आँकड़ों के स्रोत को प्राथमिक स्रोत (original data) कहते हैं। इसके विपरीत, यदि आप किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संग्रहीत, वर्गीकृत और विश्लेषित आँकड़ों का प्रयोग करते हैं, तो ऐसे आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़ें (मबवदकंतल कंजं) कहते हैं। द्वितीयक आँकड़े के स्रोत को द्वितीयक स्रोत कहते हैं। उदाहरण के लिए, एक देश में राज्य द्वारा एकत्रित, राष्ट्रीय आय संबंधित आँकड़े, उस राज्य के लिए प्राथमिक आँकड़े हैं, परंतु वही आँकड़े उन अनुसंधानकर्ताओं के लिए, जो बाद में उनका प्रयोग करते हैं, द्वितीयक आँकडे बन जाते हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि प्राथमिक आँकड़े, कच्ची सामग्री के रूप में होते हैं, जिनका, सांख्यिकीय विधियों द्वारा, विश्लेषण किया जाता है। जब कि, द्वितीयक आँकड़े, तैयार माल के रूप में होते हैं, क्योंकि इन्हें किसी न किसी रूप रूप में सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग द्वारा प्रतिपादित किया जा चुका होता है।

यदि आपने, अपने सर्वेक्षण के लिए, प्राथमिक आँकड़ों को एकत्रित करने का निश्चय कर लिया है, तो आपको उन स्रोतों की पहचान करनी होगी जिन से आप आँकड़े एकत्रित कर सकते हैं। बड़े अनुसंधानों जैसे जनगणना में, सर्वेक्षणीय व्यक्तियों की संख्या बहुत अधिक होती हैं, परंतु छोटे अनुसंधानों, जैसे ''किसी नगर में, औद्योगिक श्रमिकों का निर्वाह–व्यय ज्ञात करना'', में सर्वेक्षणीय व्यक्तियों की संख्या कम हो जाती है। यदि आपने द्वितीयक आँकड़ों का प्रयोग करने का निश्चय किया है, तो आप के लिए यह आवश्यक है कि आप उन आँकड़ों का संपादन और सूक्ष्म परीक्षण करें। अन्यथा, संभव हो सकता है कि इनमें वांछित परिशुद्धता स्तर न हो या ये आपके प्रयोजन के लिए उपयुक्त या पर्याप्त न हों। यदि आप अपने सर्वेक्षण में प्रयोग करने से पूर्व, द्वितीयक आँकड़ों का संपादन और संवीक्षण नहीं करें तो सम्भव है कि आप के अनुसंधान के परिणाम, पूर्णतया शुद्ध न हों। इसलिए, द्वितीयक आँकड़ों को सदैव ही बड़ी सावधानी से प्रयोग करना चाहिए। बाउले (Bowley) लिखते हैंः ''प्रकाशित

आँकड़ों के अभिप्राय और सीमाओं को ज्ञात किए बिना, इनके प्रत्यक्ष मूल्य को मान्यता देना कभी सुरक्षित नहीं होता''।

सांख्यिकी का महत्व

प्राचीन काल में सांख्यिकी केवल शासन – कला के विज्ञान के रूप में ही प्रयोग की जाती थी। प्रशासनिक कार्यों के लिए राज्य द्वारा जनसंख्या, जीवन एवं मृत्यु आदि विविध कार्यों संबंधी आँकड़े एकत्रित किए जाते थे। तथापि, हाल के वर्षों में, सांख्यिकी का क्षेत्र बढ़ गया है तथा सामाजिक तथा आर्थिक समस्याएँ भी इस के कार्यक्षेत्र में शामिल हो गई हैं। सांख्यिकीय तकनीकों में हुए विकास ने भी इसके क्षेत्र को विस्तृत कर दिया है। सांख्यिकी अब राज्य–प्रशासन का अंग मात्र ही न होकर आज लगभग सभी विज्ञानों जैसे– सामाजिक, भौतिक तथा प्राकृतिक को परिवेष्टित करती है। वास्तव में आज सांख्यिकी का प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों, जैसे कृषि, व्यवसाय एवं उद्योग, समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र जीवांकिकी (biometry) आदि में किया जाता है। अतः आजकल सांख्यिकी का उपयोग मानवीय क्रिया के प्रत्येक क्षेत्र में किया जाता है।

सांख्यिकी एवं राज्य

प्राचीन काल में राज्य–प्रशासन का कार्य केवल कानून और व्यवस्था बनाये रखने तक सीमित था। राज्य (सैनिक तथा राजस्व नीति निर्माण के उद्देश्य से) मानवशक्ति, अपराधों, आय तथा धन आदि संबंधी आँकड़े एकत्रित करते थे। परंतु कल्याणकारी राज्य की परिकल्पना के प्रादुर्भाव के साथ राज्य की भूमिका में भी विस्तार हुआ है। अतः समस्त विश्व में आर्थिक तथा अन्य नीतियाँ बनाने के लिए सरकारों द्वारा मूल्यों, उत्पादन, उपभोग, आय एवं व्यय आदि संबंधी सांख्यिकीय आंकड़ों का प्रयोग पर्याप्त मात्रा में किया जाता है। अपनी जनता का जीवन–स्तर ऊँचा करने के लिए, भारत जैसे विकासशील देश नियमित आर्थिक विकास की नीति अपना रहे हैं। इस उद्देश्य के लिए राज्य को अपने निर्णयों के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों के सही तथा विश्वसनीय विश्लेषण को आधार बनाना चाहिए। उदाहरणार्थ, पंचवर्षीय योजनाओं का निर्माण करते समय विभिन्न नीतियों का निर्धारण करने के लिए सरकार को देश में कच्चे माल, पूँजीगत वस्तुओं तथा वित्तीय साधनों की उपलब्धता तथा आयु, लिंग, आय आदि के गुणों के आधार पर जनसंख्याके वितरण का ज्ञान होना चाहिए।

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी

विभिन्न आर्थिक समस्याओं जैसे, उत्पादन, उपभोग, वितरण आदि के समाधान में सांख्यिकीय विश्लेषण अत्यधिक उपयोगी है। उदाहरणार्थ, उपभोग संबंधी समंकों के विश्लेषण से समाज के विभिन्न वर्गो द्वारा विभिन्न वस्तुओं के उपभोग के प्रारूप का ज्ञान हो सकता है। विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्धारण के लिए मूल्य, मज़दूरी, उपभोग, बचत तथा विनियोग, आदि संबंधी समंक महत्वपूर्ण हैं। इसी प्रकार, आय की विषमता कम करने संबंधी नीति बनाने के लिए राष्ट्रीय आय एवं सम्पत्ति पर आँकड़े उपयोगी है। अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के उपयोग के परिणाम स्वरूप अनेक आर्थिक सिद्धांत, जैसे ऐंजिल का उपभोग का नियम, आय–वितरण का नियम आदि बने हैं। आर्थिक नियोजन में सूचकांक, समय सारणी विश्लेषण, प्रतिगमन विश्लेषण आदि सांख्यिकीय तकनीकें महत्वपूर्ण हैं। उदाहरणार्थ, मजदूरों को महंगाई–भत्ता या बोनस देने के लिए उपभोक्ता मूल्य निर्देशांक का उपयोग किया जाता है। समय सारिणी विश्लेषण द्वारा माँग का पूर्वानुमान किया जा सकता है। अनेक आर्थिक परिकल्पनाओं के सत्यापन के लिए सांख्यिकीय समंकों का अधिकाधिक उपयोग किया जाने लगा है।

व्यवसाय तथा प्रबंध में सांख्यिकी

आकार विस्तार तथा बढ़ती हुई प्रतियोगिता के परिणामस्वरूप आधुनिक व्यावसायिक उद्यम की क्रियाएँ अधिक जटिल तथा अभियाचन करने वाली होती जा रही हैं। विशाल उद्यमों में स्वामित्व तथा प्रबन्ध के पृथककरण के परिणामस्वरूप पेशेवर प्रबन्ध का उद्भव हुआ हैं। प्रबंधकीय निर्णय लेने की सफलता बहुत कुछ सही तथा सामयिक सूचनाओं पर निर्भर रहती है जो सांख्यिकीय समंकों से प्राप्त होती है। अतः व्यवसाय तथा उद्योग की विभिन्न क्रियाओं जैसे, विक्रय, क्रय, उत्पादन, विपणन, वित्त आदि में सांख्यिकीय समंकों का उपयोग दिन–प्रतिदिन

बढ़ता जा रहा है। सांख्यिकीय विधियाँ अब विपणि खोज, उत्पाद अनुसंधान, विनियोजन नीतियों, निर्मित वस्तुओं की गुणवत्ता, आर्थिक पूर्वानुमान, अंकेक्षण तथा अनेक दूसरे क्षेत्रों में अधिकाधिक अपनायी जा रही है। प्रबन्धकों के समक्ष सभी समस्याओं में एक बात समान रहती है कि उन्हें अनिश्चितताओं की दशा में निर्णय में लेने पड़ते हैं। इस प्रकार की परिस्थितियों से निपटने के लिए सांख्यिकीय विधियाँ तकनीकें प्रदान करती हैं। अतः वालिस तथा रॉबर्ट्स का कथन, कि अनिश्चितता की दशा में विवेकपूर्ण निर्णय लेने के लिए उपयोग किये जाने वाले विधि–समूह को सांख्यिकी कहते हैं'', आश्चर्यजनक नहीं है।

बोध प्रश्न

1. *सांख्यिकी के कार्य बताइए।*

   ....

2. *निम्नलिखित वक्तव्यों पर एक पंक्ति में संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।*

   i) *सांख्यिकी केवल जटिलताओं को सरलता प्रदान करने का कार्य करती है।*

   ....

   ii) *सांख्यिकी अन्य विज्ञानों के नियमों के सत्यापन में सहायता प्रदान करती है*

   ....

   iii) *भविष्य में घटनाक्रम की अनिश्चितता के कारण, उनके अध्ययन में सांख्यिकी मुश्किल से ही कुछ सहायता प्रदान कर सकती है।*

   ....

   iv) *सांख्यिकी के अभाव में नियोजन की कल्पना नहीं की जा सकती।*

   ....

   v) *एक बड़े संस्थान में एक कार्मिक अधिकारी सांख्यिकी के ज्ञान के बिना एक व्यावहारिक कार्मिक योजना तैयार कर सकता है।*

   ....

3. *सांख्यिकीय सर्वेक्षण करने का क्या प्रयोजन हैं?*

   ....

4. *सांख्यिकीय सर्वेक्षण करने के प्रमुख चरणों की सूची लिखिये?*

   ....

5. *क्या आँकड़ों के संग्रहण की प्रारम्भिक तैयारियों के रूप में सांख्यिकीय सर्वेक्षण से संबंधित निम्न चरण, सम्पन्न हो सकते हैं? उत्तर ''हाँ'' या ''नहीं'' में दीजिए।*

   i) *आँकड़ों का सम्पादन ....*

   ii) *अनुसंधान का प्रकार ....*

   iii) *परिशुद्धता का स्तर ....*

   iv) *आँकड़ों का विश्लेषण ....*

   v) *सारणीयन ....*

उत्तर

2.

i) नहीं। कुछ अन्य कार्य भी हैं।
ii) हाँ। संबद्ध समंक (आँकड़े) संकलित करके।
iii) नहीं। सम्भाविता सिद्धांत तथा पूर्वानुमान की विधियाँ सहायक होती हैं।
iv) हाँ। बहुत से समंकों (आँकड़ों) की आवश्यकता होती है।
v) नहीं। सांख्यिकीय विधियों का उपयोग किया जाएगा।

सांख्यिकी की परिसीमाएँ

हमने सांख्यिकी के महत्व तथा कार्यों का विवेचन किया है। अब हम सांख्यिकी की परिसीमाओं के विषय में परिचर्चा करेंगे। सांख्यिकीय विधियों की निम्नलिखित कुछ परिसीमाएँ हैं जिनको इन विधियों का उपयोग करते समय ध्यान में रखना चाहिए।

1. **सांख्यिकी केवल संख्यात्मक विशिष्टताओं पर विचार करती हैं** : सांख्यिकी संख्याओं में व्यक्त तथ्यों से संबंध रखती है। अतः वे तथ्य तथा समस्याएँ जो संख्याओं में व्यक्त नहीं की जा सकती, सांख्यिकी के क्षेत्र में नहीं आतीं। सुन्दरता, आँखों का रंग, बुद्धि आदि गुणात्मक लक्षण हैं, अतः प्रत्यक्ष रूप में इनका अध्ययन नहीं किया जा सकता। इन लक्षणों का अध्ययन केवल परोक्ष रूप से, विशिष्ट अंक निर्धारित करने के पश्चात् इन्हें संख्याओं में व्यक्त करके ही किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक व्यक्ति समूह के बौद्धिक–स्तर का अध्ययन ''बौद्धि–स्तर–भागफल'' (Intellegence Quotients-IQS) का प्रयोग करके ही किया जा सकता है।

2. **सांख्यिकी व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन नहीं करती** : सांख्यिकी का संबंध तथ्यों के समूह से होने के कारण, एक अकेली तथा पृथक संख्या सांख्यिकी नहीं समझी जा सकती। उदाहरणार्थ, सांख्यिकी के दृष्टिकोण से एक व्यक्ति का कद महत्वपूर्ण नहीं, परंतु एक व्यक्ति–समूह का औसत कद महत्वपूर्ण है। इस संदर्भ में आप सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा पुनः स्मरण कर सकते है।

3. **सांख्यिकीय नियम यथातथ्य नहीं होते** : सांख्यिकी के नियम प्राकृतिक विज्ञान के नियमों के समान यथातथ्य नहीं होते। वे कुछ परिस्थितियों में ही सत्य होते हैं तथा उन के सत्य होने के लिए हमेशा कोई आकस्मिक कारण जुड़ा रहता है। अतः उन पर आधारित निष्कर्ष केवल लगभग समीपवर्ती रहते हैं तथा एकदम सही एवं यथातथ्य नही होते। उनका सार्वभौमिक उपयोग नहीं किया जा सकता। भौतिकी तथा रसायनशास्त्र जैसे शुद्ध विज्ञानों के नियम प्रयोग में सार्वभौमिक होते हैं।

4. **सांख्यिकीय परिमाण एवं निष्कर्ष औसत रूप में सत्य होते हैं** : सांख्यिकीय विधियाँ किसी तथ्य तथा समस्या का औसत आचरण ही स्पष्ट करती हैं। अतः एक कम्पनी के कर्मचारियों की औसत आय किसी व्यक्ति विशेष की आय को स्पष्ट नहीं करेगी। अतः सांख्यिकीय परिणाम किसी समस्या या तथ्य के सामान्य मूल्यांकन का अध्ययन करने में ही उपयोगी हैं।

5. **सांख्यिकीय विधि किसी समस्या के अध्ययन की विभिन्न विधियों में से एक हैं** : एक समस्या का अध्ययन अनेक विधियों द्वारा किया जा सकता है। सांख्यिकीय विधि केवल उन विधियों में से एक है। सभी परिस्थितियों विधियाँ सर्वोत्तम समाधान या उत्तर प्रदान नहीं करतीं। प्रायः यह आवश्यक होता है कि एक समस्या का अध्ययन उसके सामाजिक परिवेश, जैसे– संस्कृति, धर्म आदि के संदर्भ में किया जाता है। अतः सांख्यिकीय निष्कर्षों को अन्य प्रमाणों द्वारा अनुपूरित करने की आवश्यकता पड़ती है।

6. **सांख्यिकी का दुरूपयोग भी हो सकता है** : विभिन्न सांख्यिकीय विधियों की अपनी परिसीमाएँ होती हैं। यदि उनका सावधानी से प्रयोग न किया जाए तो उनसे गलत परिणाम निकल पड़ते हैं। अतः सांख्यिकी की

परिसीमाओं में से एक यह है कि गलत हाथों में इसका दुरूपयोग हो सकता है। यह संस्थान अपने दृष्किोण को सिद्ध करने के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों के मिथ्या रूप प्रस्तुत करने के लिए लालायित हो जाते हैं। उदारणार्थ, यदि आपको यह बताया जाए कि एक विशेष वर्ष में स्त्री चालकों द्वारा शहर में कार दुर्घटनाओं की संख्या 10 थी, तथा पुरूष चालकों द्वारा यह संख्या 40 थी तब इस सूचना के आधार पर आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि स्त्रियाँ सुरक्षित वाहन चालक हैं। यदि आप यह निष्कर्ष निकालते हैं तो आप इस सूचना का गलत अर्थ लगा रहे हैं। सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए आपके लिए दोनों प्रकार के वाहन–चालकों की कुल संख्या का ज्ञान होना आवश्यक हैं।

सांख्यिकी पर अविश्वास (Distrust of Statistics)

सांख्यिकी विज्ञान की उपयोगिता तथा महत्व होने के बावजूद इसे अविश्वास की नजर से देखा जाता है। प्रायः इसे ऐसे व्यक्तियों द्वारा बदनाम किया जाता है जो इसके वास्तविक उद्देश्य और परिसीमाओं को नहीं जानते हैं। प्रायः निम्न प्रकार के कथन सुनने को मिलते हैं, ''झूठ की तीन श्रेणियाँ होती हैं– झूठ, सफेद झूठ तथा सांख्यिकी।'' ''सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध कर सकती है।'' ''सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकती''। ''सांख्यिकी सबसे प्रथम श्रेणी का झूठ है''। ये कथन सांख्यिकी में अविश्वास की अभिव्यक्ति हैं। सांख्यिकी में अविश्वास से हमारा तात्पर्य सांख्यिकी समंकों, सांख्यिकीय विधियों तथा ज्ञान किए गये निष्कर्षो में हमारे विश्वास की कमी से है। आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि सांख्यिकी में अविश्वास क्यों होता हैं? सांख्यिकी में अविश्वास में कुछ महत्वपूर्ण कारण निम्नलिखित हैं:

1. संख्याओं पर आधारित तर्क अधिक विश्वासोत्पादक होते हैं। परंतु व्यक्ति विशेष की इच्छानुसार संख्याओं में हेर–फेर किया जा सकता है। किसी विशेष दृष्टिकोण को सिद्ध करने के लिए, कभी–कभी तर्कों की गलत आँकड़ों द्वारा पुष्टि की जाती है।

2. भले ही सही संख्याओं का प्रयोग किया गया हो, वे अधूरी हो सकती हैं तथा उन्हें पाठक को भ्रमित करने के उद्देश्य से एक विशेष प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, साफ मौसम के दिनों की अपेक्षा कोहरे के मौसम के दिनों में यातायात दुर्घटनाएँ कम पाई जाती हैं। इससे यह निष्कर्ष लगाया जा सकता है कि कोहरे के मौसम में वाहन चलाना अधिक सुरक्षित है। यह निष्कर्ष गलत है। सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हमें दोनों प्रकार के मौसम में यातायात की तीव्रता के अन्तर को ध्यान में रखना होगा।

3. सांख्यिकीय आँकड़ों को देखकर उसकी गुण कोटि का पता नहीं लगा सकते। कभी–कभी अनजाने में भी अधूरे या अशुद्ध आँकड़ों का प्रयोग किया जाता है जिससे गलत निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

4. सांख्यिकीय विधियों की अपनी अलग परिसीमाएँ हैं। अतः अनुसंधानकर्ता को उनका सावधानी से प्रयोग करना चाहिए। परंतु कभी–कभी सांख्यिकीय विधियाँ उन व्यक्तियों के द्वारा प्रयोग की जाती हैं जिन्हें उनका कोई भी ज्ञान नहीं होता या फिर बहुत कम ज्ञान होता है। परिणामस्वरूप, सही तथा पूर्ण समंक होने पर भी गलत विधियाँ अपनाने के कारण गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। यह सांख्यिकीय विधियों का दोष नहीं है, परंतु उन व्यक्तियों का है जो इनका उपयोग करते हैं।

एक उदाहरण लेकर हम इस विषय का उपसहार कर सकते हैं माना कि एक बच्चा चाकू से अपना हाथ काट लेता है। उस बच्चे के संरक्षक चाकू को दोष देना प्रारंभ करते हैं। यहां दोष चाकू का नहीं है बल्कि बच्चे का है जो चाकू का दुरूपयोग करता है। यह ध्यान देने योग्य बात है कि सांख्यिकी न तो कुछ सिद्ध करती है और न ही किसी बात को असत्य प्रमाणित करती है। सांख्यिकी तो केवल मात्र एक साधन (अर्थात् निष्कर्ष पर पहुँचने की विधि) है, जिसका सावधानीपूर्वक प्रयोग किया जाना चाहिए तथा केवल उन्हीं व्यक्तियों द्वारा किया जाना चाहिए जिन्हें इस विषय का ज्ञान हो।

सारांश

सांख्यिकी शब्द का उपयोग या तो बहुवचन के अभिप्राय में किया जा सकता है और या एकवचन के अभिप्राय में। बहुवचन में सांख्यिकी शब्द का अर्थ तथ्यों के संख्यात्मक विवरण या आँकड़ों या समंकों से है। सांख्यिकी कहलाने के लिए संख्यात्मक समंकों में निम्नलिखित लक्षण होने चाहिएः 1. ये तथ्यों के समूह होने चाहिए, 2. ये संख्यात्मक तथ्य समूह या आँकड़े अनेक कारणों द्वारा प्रभावित होने चाहिए, 3. ये संख्याओं में व्यक्त किए जाने चाहिए, 5. समंकों को पूर्वनिर्धारित उद्देश्य के लिए उचित ढंग से एकत्रित किया जाना चाहिए तथा 6. आँकड़ों को परस्पर रूप में प्रस्तुत किया जाना चाहिए। एकवचन में जब सांख्यिकी शब्द का प्रयोग किया जाता है तो इस का तात्पर्य उस ज्ञान–समूह से है जिसमें 1. संमकों के संकलन, 2. समंकों के वर्गीकरण तथा सारणीयन, 3. समंकोकं के प्रस्तुतीकरण, 4. समंकों के विश्लेषण तथा 5. समंकों के निर्वचन करने संबंधी निधियाँ तथा तकनीकें समझाई जाती है।

सांख्यिकीय विधियाँ : 1. विवरणात्मक सांख्यिकी, तथा 2. निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में विभाजित की जा सकती है। सांख्यिकीय विधियाँ 1. तथ्यों को सही रूप में प्रस्तुत करने, 2. जटिल तथा दुःसाध्य समंकों को सरल बनाने, 3. तुलना करने हेतु तकनीक प्रदान करने, 4. विभिन्न क्षेत्रों में नीति–निर्धारण करने, 5. विभिन्न तथ्यों के परस्पर संबंध को ज्ञात करने, 6. भविष्य का पूर्वानुमान लगाने, 7. घटना की अनिश्चितता को मापने, 8. सांख्यिकीय परिकल्पना का सत्यापन करने, तथा 9. प्रामाणिक निष्कर्ष ज्ञात करने में सहायक होते हैं।

सांख्यिकीय विधियाँ विभिन्न क्षेत्रों जैसे – राज्य प्रशासन, प्रबन्ध अर्थशास्त्र, व्यवसाय प्रबन्ध आदि में उपयोगी होती हैं। आज के व्यवसाय के प्रबन्ध करने की जटिलताओं में उत्तरोत्तर वृद्धि के परिणामस्वरूप निर्णय लेने की प्रक्रिया में सांख्यिकी विधियाँ बहुत उपयोगी तथा सुविधाजनक साबित हो रही हैं। फिर भी सांख्यिकीय प्रसाधनों या विधियों के प्रयोग की कुछ पसीमाएँ हैं। सांख्यिकी न तो गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन करती है और न ही व्यक्तिगत इकाइयों का। सांख्यिकीय नियम यथातथ्य नहीं होते और उनका दुरूपयोग किया जा सकता है, विशेष रूप से जो सांख्यिकीय विधियों से अनभिज्ञ हैं, के द्वारा उनके अंधाधुंध प्रयोग के परिणामस्वरूप लोगों का, इस पर से विश्वास उठ गया है।

स्वपरख प्रश्न

1. ''सांख्यिकी तथ्यों का संख्यात्मक विवरण है, परंतु संख्याओं में व्यक्त सभी तथ्य सांख्यिकी नहीं कहलाते'', विवेचना कीजिए।

   ....

   ....

2. सांख्यिकी की परिभाषा कीजिए तथा सांख्यिकी के विभिन्न कार्यों की विवेचना कीजिए।

   ....

   ....

3. सांख्यिकी के महत्व की विवेचना कीजिए तथा सांख्यिकी की परिसीमाओं को स्पष्ट कीजिए।

   ....

   ....

4. सांख्यिकी की अविश्वास से आप क्या समझते हैं? क्या सांख्यिकी विज्ञान इस के लिए जिम्मेदार हैं?

   ....

   ....

यूनिट 2

आंकडों का वर्गीकरण एवं सारणीयण

(1) वर्गीकरण

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- वर्गीकरण के अर्थ की व्याख्या कर सकें
- वर्गीकरण के उद्देश्यों और विधियों का वर्णन कर सकें
- आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित विभिन्न पदों का वर्णन कर सकें
- आवृत्ति बंटन तैयार कर सकें।

संग्रहीत आंकड़े अव्यवस्थित दशा में होते हैं अतः आप उनका निर्वचन नहीं कर सकते, न ही उनसे उपयोगी निष्कर्ष निकाल सकते हैं। अतः संग्रहीत आंकड़ों के आधार पर उपयोगी निष्कर्ष निकालने के लिए यह आवश्यक है कि आंकड़ों को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत किया जाए। आंकड़ों का वर्गीकरण आंकड़ों के समूह को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत करने में हमारी सहायता करता है। इस इकाई में आप वर्गीकरण के अर्थ व उद्देश्य तथा उसकी विभिन्न रीतियों के विषय में पढ़ेंगे। आप विभिन्न प्रकार के आवृत्ति बंटनों के विषय में तथा उनके निर्माण की विधियों के विषय में भी जानकारी प्राप्त करेंगे।

वर्गीकरण का अर्थ

आंकड़ों को उनकी समानता और समरूपता के आधार पर व्यवस्थित करके वर्गों या विभागों में प्रस्तुत करने की क्रिया को वर्गीकरण (classification) कहते हैं। समस्त समान मदें एक वर्ग में तथा समस्त असमान मदें अन्य वर्गों में रख दी जाती हैं। सांख्यिकीय आंकड़े उनकी विशेषताओं के अनुसार वर्गीकृत किये जाते हैं। उदाहरणार्थ यदि हमने एक वर्ष में विश्वविद्यालय में प्रवेश लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या के विषय में आंकड़े एकत्रित किये हैं, तो विद्यार्थियों का छात्र–छात्राओं के आधार पर वर्गीकरण किया जा सकता है। इस स्थिति में समस्त छात्र एक वर्ग में तथा समस्त छात्राएं दूसरे वर्ग में रखी जाएंगी। विद्यार्थियों को आयु, अंकों वैवाहिक स्थिति, ऊंचाई आदि के आधार पर भी वर्गीकृत किया जा सकता है। वर्गीकरण के लिए हम किन विशेषताओं का चुनाव करते हैं, यह इस बात पर निर्भर करेगा कि अध्ययन का उद्देश्य क्या है।

उदाहरण के लिए, यदि हम विद्यार्थियों के धार्मिक मिश्रण का अध्ययन करना चाहते हैं तो हम धर्म के आधार पर विद्यार्थियों का वर्गीकरण करेंगे।

वर्गीकरण के उद्देश्य

वर्गीकरण निम्नलिखित उद्देश्यों को प्राप्त करने में सहायक होता है :

1 यह आंकड़ों के समूह को संक्षिप्त तथा सरल स्वरूप में प्रस्तुत करने में सहायक होता है।

2 यह आंकड़ों के समूह को समानताओं (similarities) और साम्यताओं (resemblances) के आधार पर विभाजित करता है, जिससे तुलना करना संभव हो जाता है।

3 यह अव्यवस्थित आंकड़ों को व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत करने की एक प्रक्रिया है जिसमें हमें उपयोगी निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।

4 यह आंकड़ों के सारणीयन तथा उनके विश्लेषण का आधार प्रस्तुत करता है।

5 यह आंकड़ों को एक सार्थक ढांचा प्रदान करता है जिससे हमें उनकी संभव विशेषताओं को पहचााने में सहायता मिलती है।

वर्गीकरण की विधियां

मोटे तौर पर, वर्गीकरण की दो विधयां हैं : ;पद्ध गुणों के आधार पर वर्गीकरण ;पपद्ध चरों के आधार पर वर्गीकरण।

गुणों के आधार पर वर्गीकरण (Classification according to Attributes):**-** गुण (attribute) एक ऐसी गुणात्मक विशेषता है जिसे संख्या में व्यक्त नहीं किया जा सकता। गुण की केवल उपस्थिति या अनुपस्थिति के विषय में जाना जा सकता है। उदाहरणार्थ बुद्धि, धर्म, जाति, लिंग आदि ऐसे गुण हैं जिनका परिमाणन नहीं किया जा सकता। जब वर्गीकरण गुणों के आधार पर करना होता है, तो मदों में अन्तर किसी गुण की उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर (पुरुष और स्त्री) किया जाता है। गुण की विशेषताओं में अंतर किसी प्राकृतिक सीमांकन रेखा के आधार पर किया जा सकता हैं इस प्राकृतिक अंतर के आधार पर हम उस समूह का निश्चय कर सकते हैं जिसमें कि किसी विशेष मद को रखा जाना है। उदाहरणार्थ, यदि हम बालों के रंग को वर्गीकरण, के आधार के रूप में चुनते हैं, तब एक समूह भूरे बालों वाले व्यक्तियों का, और दूसरा काले बालों वाले व्यक्तियों का होगा। गुणात्मक विशेषता के आधार पर वर्गीकरण दो प्रकार का होता है।

1 साधारण (सरल) वर्गीकरण (Simple Classification) **:** साधारण वर्गीकरण में आंकड़ों को केवल एक गुणात्मक विशेषता के आधार पर वर्गीकृत आंकड़े साधारण वर्गीकरण का एक उदाहरण हैं। इस प्रकार के वर्गीकरण को द्विधा वर्गीकरण (dichotomous classification) भी कहा जाता है।

2 बहुगुणीय वर्गीकरण (Manifold Classification) **:** वर्गीकरण की इस विधि में आंकड़ों को एक से अधिक गुणात्मक विशेषताओं के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। उदाहरणार्थ, एक विश्वविद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या से सम्बन्धित आंकड़ों को उनके लिंग तथा उनकी वैवाहिक स्थिति के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है।

चरों के आधार पर वर्गीकरण (Classification according to Variables) आंकड़ों की उन अनुमान्य विशेषताओं को, जिन्हें संख्यात्मक रूप में प्रकट किया जा सके, चर कहते हैं। मजदूरी, आयु, ऊंचाई, भार, अंक, दूरी आदि, चरों के उदाहरण हैं। जैसा कि आप जानते हैं ये सब चर परिमाणात्मक रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं। वर्गीकरण के इस रूप में आंकड़ों को आवृत्ति बंटन के रूप में दिखाया जाता है। आवृत्ति बंटन एक ऐसा सारणिक प्रस्तुतीकरण है जो सामान्यतः आंकड़ों को वर्गों में व्यवस्थित करता है तथा इन वर्गों में से प्रत्येक में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या (आवृत्ति) को दिखाता है। अनुप्रयुक्त चरों की संख्या के आधार पर आवृत्ति बंटन के तीन वर्ग होते हैं :

(1) एकचर (uni-variate) आवृत्ति बंटन,

(2) द्विचर (bi-variate) आवृत्ति बंटन, तथा

(3) बहुचर (multi-variate) आवृत्ति बंटन।

एकचर आवृत्ति बंटन : उदाहरण के लिए एक कक्षा के विद्यार्थियों को उनके द्वारा प्राप्त अंकों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है। यह उदाहरण 1 में प्रस्तुत किया गया है।

उदाहरण 1

एकचरीय आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0.10	15
10.20	25
20.30	30
30.40	20
40.50	10
योग	100

उदाहरण 1 में दिये गए आवृत्ति बंटन के विषय में निम्न बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए :

i) सांख्यिकी में अंकों को 0–10, 10–20, 20–30 आदि विभिन्न वर्गों में विभाजित किया गया है।

ii) 0–10 अंक वाला प्रथम वर्ग यह संकेत करता है कि वे विद्यार्थी जिन्होंने शून्य अथवा उससे अधिक, पर 10 से कम अंक प्राप्त किये हैं, इस वर्ग में रखे जाएंगे; इसी प्रकार 10–20 अंक वाला वर्ग यह संकेत करता है कि वे विद्यार्थी जिन्होंने 10 या अधिक परन्तु 20 से कम अंक प्राप्त किये हैं, इस वर्ग में रखे जाएंगे।

iii) इन वर्गों में आने वाले विद्यार्थियों को संबंधित वर्गों में रखा गया हैं, जिसका अर्थ है कि 15 विद्यार्थी 0–10 अंक वाले वर्ग में आते हैं, 25 विद्यार्थी 10–20 अंक वाले वर्ग में आते हैं, आदि। किसी वर्ग में आने वाले विद्यार्थियों की संख्या को उस वर्ग की बारंबारता (आवृत्ति) कहा जाता है।

द्विचर आवृत्ति बंटन : दो चरों वाले आवृत्ति बंटन को द्विचर आवृत्ति बंटन कहते हैं। पिछले उदाहरण सं. 1 में दिया गया एकचर आवृत्ति बंटन विद्यार्थियों द्वारा केवल सांख्यिकी में प्राप्त अंक दर्शाता है। यदि एक आवृत्ति बंटन में ही दो चरों, जैसे सांख्यिकी में प्राप्त अंक तथा आयु को दर्शाया जाता है तो उसे द्विचर आवृत बंटन कहा जाता है। द्विचर आवृत्ति बंटन के लिए निम्न उदाहरण 2 को देखिए।

उदाहरण 2

द्विचर आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक व आयु के साथ विद्यार्थियों की संख्या

प्राप्त अंक	आयु (पिछली सालगिरह पर वर्षों में)				योग
	18	19	20	21	
0.10	1	4	8	2	15
10.20	4	8	9	4	25
20.30	.	3	17	10	30

30.40	.	5	10	5	20
40.50	.	.	1	9	10
योग	5	20	45	30	100

उदाहरण 2 में दिये गए द्विचर आवृत्ति बंटन के विषय में निम्न बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए :

पद्ध सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को 0–10, 10–20, 20–30 आदि वर्गों में विभाजित किया गया है, जबकि पिछली सालगिरह पर वर्षों में आयु 18 वर्ष, 19 वर्ष, 20 वर्ष, आदि ली गई है।

पपद्ध वे विद्यार्थी जिन्होंने शून्य अथवा उससे अधिक पर 10 से कम अंक प्राप्त किये हैं तथा जिनकी आयु 18 वर्ष है, 0–10/18 के सम्मुख रखे गए हैं। इसी प्रकार 0–10 अंक वाले वर्ग में आने वाले विद्यार्थियों जिनकी आयु 19, 20 और 21 वर्ष है, की संख्या क्रमशः 4, 8 और 2 है। 18 वर्ष की आयु वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या 5 है, जिनमें से एक विद्यार्थी 0–10 अंक वाले वर्ग में तथा शेष 4, 10–20 अंक वाले वर्ग में रखे गये हैं।

बहुचर आवृत्ति बंटन : दो से अधिक चरों वाला आवृत्ति बंटन बहुचर आवृत्ति कहलाता हैं उदाहरणार्थ, एक कक्षा के विद्यार्थियों को अंकों, आयु तथा लिंग के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है। आइए पिछले उदाहरण सं. 1 एवं 2 में दिये गये समंकों को लें तथा विद्यार्थियों को लिंग के आधार पर और आगे वर्गीकृत करें। उदाहरण 3 को देखिए और जांच कीजिए कि यह कैसे किया गया है।

उदाहरण 3

बहुचर आवृत्ति बंटन का उदाहरण

सांख्यिकी में अंक, लिंग व आयु के साथ विद्यार्थियों की संख्या

(पिछली सालगिरह पर वर्षों में)

प्राप्त अंक	आयु (वर्षों में) तथा लिंग												योग		
	18			19			20			21					
	पु.	स्त्री	योग	पु.	स्त्री	योग	पु.	स्त्री	योग	पु.	स्त्री	योग	पु.	स्त्री	योग
0.10	.	1	1	2	2	4	5	3	8	2	.	2	9	6	15
10.20	3	1	4	4	4	8	4	5	9	4	.	4	15	10	25
20.30	.	.	.	1	2	3	7	10	17	7	3	10	15	15	30
30.40	.	.	.	3	2	5	5	5	10	3	2	5	11	9	20
40.50	.	.	.	.	.	.	.	1	1	5	4	9	5	5	10
योग	3	2	5	10	10	20	21	24	45	21	9	30	55	45	100

बोध प्रश्न

1 वर्गीकरण क्या है व इस के क्या उद्देश्य हैं ?

....

2 गुणों के आधार पर साधारण वर्गीकरण तथा बहुगुणीय वर्गीकरण में क्या अन्तर है?

....

3 गुणात्मक विशेषताओं के अनुसार वर्गीकरण तथा चरों के अनुसार वर्गीकरण में अन्तर कीजिए।

....

4 एकचर और द्विचर आवृत्ति बंटन में क्या अंतर है?

....

आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित शब्द/पद

आवृत्ति बंटन के अर्थ और विधियों के अध्ययन के पश्चात् अब हमें आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित पदों के विषय में विवेचन करना चाहिए। आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित अनेक पद हैं। सर्वप्रथम उन्हें समझना हमारे लिए अनिवार्य है।

1 खण्डित तथा अखण्डित चर (Discrete and Continuous Variables)

खण्डित चर ऐसा चर है जिसका मूल्य निश्चित होता है तथा जिसके विभिन्न मूल्यों में एक निश्चित अन्तर होता है। इसे असंतत चर अथवा विच्छिन्न चर भी कहा जाता है। सामान्यतः इसका मूल्य भिन्नों में नहीं होता। प्रायः यह किसी वस्तु गणना का परिणाम होता हैं एक फैक्टरी में श्रमिकों की संख्या, एक परिवार में बच्चों की संख्या, किसी विशेष दिन हुई दुर्घटनाओं की संख्या, आदि खण्डित चर के उदाहरण हैं। इसके विपरीत अखण्डित चर मूल्यों के एक निश्चित सीमान्तर में कोई भी भिन्नात्मक मूल्य हो सकता है। इसे संतत चर अथवा अविच्छिन्न चर भी कहा जाता हैं यह किसी वस्तु के परिमापन का परिणाम होता है। किसी कक्षा के विद्यार्थियों का भार, किसी संगठन के श्रमिकों की आय किसी नगर के वासियों की आयु आदि अखण्डित चर के उदाहरण हैं। खण्डित चरों के लिए बनाया गया आवृत्ति बंटन, खण्डित आवृत्ति बंटन अथवा असंतत आवृत्ति बंटन कहलाता है जबकि अखण्डित चरों के लिए बनाया गया। आवृत्ति बंटन अखण्डित आवृत्ति बंटन अथवा संतत आवृत्ति बंटन कहलाता है। उदाहरण 4 व 5 में ये दो प्रकार के आवृंत्ति बंटन दिखाए गए हैं।

उदाहरण 4

खण्डित आवृत्ति बंटन–एक हॉकी मैच में किये गए गोल और मैचों की संख्या

गोल	मैचों की संख्या
0	20
1	15
2	10
3	3
4	2
योग	50

उदाहरण 5

अखण्डित आवृत्ति बंटन–विद्यार्थियों की ऊंचाई (से.मी. में) और विद्यार्थियों की संख्या

ऊंचाई (से.मी.)	विद्यार्थियों की संख्या
130.140	15
140.150	25
150.160	30
160.170	20
170.180	10
योग	100

उदाहरण 4 में एक हॉकी मैच में किये गये गोलों की संख्या का चर खण्डित चर हैं इसी प्रकार, उदाहरण 5 में विद्यार्थियों की ऊंचाई का चर अखण्डित चर है।किन्तु ऊपर दिये गए निर्देशन चित्रों से यह नहीं समझना चाहिये कि केवल अखण्डित चरों के लिए ही वर्ग अंतराल सहित आवृत्ति बंटन बनाया जा सकता है। वास्तव में, वर्ग अंतरालों के साथ आवृत्ति बंटन खण्डित चरों के लिए भी बनाया जा सकता है, जैसा कि उदाहरण 6 में दिखाया गया हैः

उदाहरण 6

खण्डित चरों के लिए वर्ग अंतरालों के साथ आवृत्ति बंटन

एक कक्षा में उपस्थित छात्रों की संख्या और वर्ष में कार्य दिवसों की संख्या

उपस्थित छात्रों की संख्या	वर्ष में कार्य दिवसों की संख्या
10.14	8
15.19	12
20.24	116
25.29	74
30.34	40
योग	250

उदाहरण 6 में एक कक्षा में उपस्थित छात्रों की संख्या का चर एक खण्डित चर है, किन्तु यहां इसे एक अखण्डित चर की भांति वर्ग अंतरालों सहित दिखाया गया है। ऐसे बंटन खण्डित प्रकृति के होते हैं, यद्यपि प्रस्तुतीकरण में ये अखण्डित बंटनों जैसे दिखाई देते हैं।

2 वर्ग सीमाएं (Class limits) :

प्रत्येक वर्ग या अंतराल की दो सीमाएं होती हैं (i) अधः सीमा (lower limits) तथा (ii) ऊपरी सीमा

(upper limit) । किसी वर्ग में न्यूनतम संभव माप को अधः सीमा के नाम से जाना जाता है, जबकि अधिकतम संभव माप को ऊपरी सीमा के नाम से जाना जाता हैं उदाहरण 6 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। इसमें प्रस्तुत आवृत्ति बंटन में पहले वर्ग (10—14) की वर्ग सीमाएं 10 तथा 14 हैं। इस वर्ग के लिए न्यूनतम संभव माप 10 है, जबकि अधिकतम माप 14 है। इसी प्रकार दूसरे वर्ग (15—19) की अधः सीमा 15, तथा ऊपरी सीमा 19 है।

3 वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु (Mid-point of a class interval) :

किसी वर्ग अंतराल की अधः सीमा तथा ऊपरि सीमा के बीच की दूरी पर आने वाले बिन्दु को उस वर्ग का मध्य बिन्दु या मध्य मूल्य कहते हैं। सूत्र रूप में इसे निम्न प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है,

Mid-Point or Mid-value = (L+U) ÷ 2

जहां, L= वर्ग अंतराल की अधः सीमा

U= वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा

दूसरे शब्दों में, किसी वर्ग की अधः सीमा तथा ऊपरी सीमा के योग को दो से विभाजित करने पर उस वर्ग का मध्य बिन्दु प्राप्त किया जाता है। उदाहरण 7 में सांख्यिकी में अंकों के उदाहरण में विभिन्न वर्गों के मध्य बिन्दु परिकलित किये गये हैं।

उदाहरण 7

वर्ग अन्तरालों के मध्य बिन्दुओं का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या	मध्य बिन्दु
0.10	15	5
10.20	25	15
20.30	30	25
30.40	20	35
40.50	10	45
योग	100	

4 वर्ग अंतराल का वर्ग–विस्तार (Magnitude of class interval)

एक वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा तथा अधः सीमा के बीच के अंतर को वर्ग अंतराल का वर्ग विस्तार कहा जाता है। सूत्र रूप में इसे निम्न प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है,

Interval = U – L

उदाहरण 8 को ध्यानपूर्वक देखिए तथा इस बात का अध्ययन कीजिए कि विभिन्न वर्ग अंतरालों का वर्ग विस्तार किस प्रकार परिकलित किया गया है।

उदाहरण 8

वर्ग अंतरालों के वर्ग विस्तार का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या	वर्ग विस्तार
0.10	15	10 दृ 0 त्र 10
10.20	25	20 दृ 10 त्र 10
20.30	30	30 दृ 20 त्र 10
30.40	20	40 दृ 30 त्र 10
40.50	10	50 दृ 40 त्र 10
योग	100	

ऊपर दिये गए उदाहरण 8 में, आपने देखा होगा कि विभिन्न वर्ग अंतरालों का वर्ग विस्तार बराबर है। किन्तु यह सदा आवश्यक नहीं है कि विभिन्न वर्ग अंतरालों का वर्ग–विस्तार बराबर हो। विभिन्न वर्गों के लिए असमान वर्ग विस्तार वाला आवृत्ति बंटन भी हो सकता है।

5 वर्ग–आवृत्ति (Class frequency) :

किसी वर्ग की सीमाओं के अंतर्गत आने वाले प्रेक्षणों की संख्या को उस वर्ग की आवृत्ति कहते हैं। ऊपर दिये गए निर्देश चित्र 8 का अध्ययन कीजिये। प्रथम वर्ग अंतराल (अर्थात् 0–10) की आवृत्ति 15 है। इसी प्रकार दूसरे वर्ग अंतराल (अर्थात् 10–20) की आवृत्ति 25 है। इसका यह अर्थ है कि 15 विद्यार्थी प्रथम वर्ग अंतराल की सीमाओं में आते हैं, 25 विद्यार्थी दूसरे वर्ग अंतराल की सीमाओं में आते हैं आदि।

6 वर्गों की संख्या तथा चौड़ाई (Number and width of classes) :

वर्गों की संख्या तथा चौड़ाई के विषय में कोई निश्चित नियम बनाना संभव नहीं है। वर्गों की संख्या न तो बहुत बड़ी और न ही बहुत छोटी होनी चाहिए। स्टर्जिज ने वर्गों की संख्या निश्चित करने के लिए एक सूत्र बताया है। जिसके अनुसार : $K=1+3.3 \text{ Log } N$

जिसमें N - वर्गीकृत की जाने वाली मदों की संख्या

K - सामान्यतः प्रयोग की जाने वाले वर्गों की संख्या

कुछ अन्य कारणों से, यदि वर्गों की संख्या को K के समान लेना संभव न हो, तो वर्गों की संख्या समान्यतः $K-2$ से $K+2$ के बीच हो सकती है। उदाहरण के लिए यदि $N=500$ हो, तो हम K का मूल्य निम्न प्रकार परिकलित कर सकते हैं :

$$
\begin{aligned}
K &= 1+3.3 \log N \\
&= 1+3.3 \log (500) \\
&= 1+3.3 \, (2.6990) \\
&= 9.9067 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

अतः 500 मदों के लिए वर्गों की संख्या 10 हो सकती है या हम K-2 तथा K+2 अर्थात् 8 से 12 के बीच कोई भी संख्या ले सकते हैं। वस्तुतः यह सूत्र केवल हमारा मार्गदर्शन करता है। वर्गों की संख्या का निश्चय करते समय वर्गों की चौड़ाई संबंधी निर्णय को भी ध्यान में रखना आवश्यक है। जैसा कि पहले कहा गया है, यह आवश्यक नहीं है कि विभिन्न वर्ग अंतरालों की चौड़ाई समान रखी जाती है, तो यह आंकड़ों की तुलना का एक उपयुक्त आधार प्रदान करती है।

7 खुले सिरे वाले बंटन (open-end distribution) :

खुले सिरे वाला बंटन अथवा विवृतमुखी बंटन एक ऐसा बंटन है जिसके एक या दो वर्गों की वर्ग–सीमा नहीं होती। यह संभव है कि एक आवृत्ति बंटन में प्रथम वर्ग अंतराल की अधः सीमा न हो, तथा अन्तिम वर्ग अंतराल की ऊपरि सीमा न हो। ऐसे आवृत्ति बंटन को खुले सिरे वाला बंटन कहते हैं। खुले सिरे वाले बंटन को समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण 9 को ध्यानपूर्वक देखिए।

उदाहरण 9

खुले सिरे वाले बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	15
10.20	25
20.30	30
30.40	20
40 से अधिक	10
योग	100

ऊपर दिये गए उदाहरण 9 में, पहला वर्ग अंतराल ''10'' से कम के रूप में प्रस्तुत किया गया। इस वर्ग में कोई अधः सीमा नहीं है। इसी प्रकार अन्तिम वर्ग अंतराल के लिए कोई ऊपरी सीमा नहीं है, क्योंकि इसे ''40'' और अधिक कहा गया है। ऐसे वितरण से कुछ समस्याएं भी पैदा होती हैं, जैसे कि मध्य बिन्दु की गणना और मध्य बिन्दु पर आधारित परिकलन।

8 अपवर्जी तथा समावेशी आवृत्ति बंटन (Exclusive and Inclusive frequency distribution) :

आवृत्ति बंटन, अपवर्जी बंटन अथवा समावेशी बंटन हो सकता है। अपवर्जी आवृत्ति बंटन में एक दिये गए वर्ग अंतराल की ऊपरि सीमा उस वर्ग अपवर्जित की जाती है तथा वह अगले वर्ग अंतराल की अधः सीमा के रूप में ली जाती है। ऐसे बंटन में परस्परव्यापी वर्ग सीमाएं होती हैं।

समावेशी आवृत्ति बंटन में, किसी विशेष वर्ग की ऊपरी सीमा उसी वर्ग अंतराल में समाविष्ट की जाती है। ऐसे बंटन में गैर–परस्परव्यापी वर्ग सीमाएं होती हैं। उदाहरण 10 व 11 में अपवर्जी तथा समावेशी आवृत्ति बंटनों के उदाहरण दिये गए हैं।

उदाहरण 10

अपवर्जी आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0.10	15
10.20	25
20.30	30
30.40	20
40.50	10
योग	100

उदाहरण 11

समावेशी आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0.9	15
10.19	25
20.29	30
30.39	20
40.49	10
योग	100

उदाहरण 10 में दिखाये गए अपवर्जी बंटन में, प्रथम वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा (अर्थात् 0–10) इस वर्ग अंतराल से अपवर्जित की जाएगी तथा अगले वर्ग अंतराल (अर्थात् 10–20) में सम्मिलित की जाएगी। अतः प्रथम वर्ग अंतराल को दिया जाने वाला अर्थ होगा 0 तथा 10 से नीचे, दूसरे वर्ग अंतराल का अर्थ 10 तथा 20 से नीचे होगा, तथा इसी प्रकार अन्य वर्ग अंतरालों का अर्थ होगा। किन्तु उदाहरण 11 में दिखाये गए समावेशी बंटन में प्रथम वर्ग अंतराल (अर्थात् 0–9) की ऊपरि सीमा प्रथम वर्ग अंतराल में ही सम्मिलित की जाएगी। वास्तव में, एक वर्ग की अधः सीमा तथा ऊपरी सीमा, दोनों उसी वर्ग में सम्मिलित की जाती है।

वर्ग अंतरालों को प्रस्तुत करने की समावेशी रीति में उन मदों का वर्गीकरण संभव नहीं होता जिनके मूल्य दो लगातार वर्ग अंतरालों की ऊपरि सीमा तथा अधः सीमा के बीच हों। उदाहरणार्थ, दृष्टांत 11 में दिए गए समावेशी बंटन में, 9.3, 9.5, 9.9, 19.1, 19.4 आदि मूल्य वाले मदों का किसी भी वर्ग में वर्गीकरण नहीं किया जा सकता। वर्ग अंतरालों को प्रस्तुत करने की अपवर्जी रीति में ऐसी कोई कठिन नहीं होती। अतः वर्ग अंतराल

सामान्यतः अपवर्जी रूप में अभिव्यक्त किये जाते हैं। तथापि, अखण्डित चरों के लिए अपवर्जी रीति तथा खण्डित चरों के लिए समावेशी रीति अपनाने की सामान्य प्रथा है।

9 वर्ग परिसीमाएं (Class boundaries) अथवा वर्ग अंतराल की वास्तविक सीमाएं :

अखण्डित चरों से संबंधित माप सदा परिशुद्धता की एक समुचित मात्रा तक दर्ज किये जाते हैं। जब एक व्यक्ति की ऊंचाई 160 से.मी. दर्ज की जाती है, तो इसका अर्थ यह होता है कि उस व्यक्ति की ऊंचाई 159.5 से.मी. तथा 160.5 से.मी. के बीच कहीं भी हो सकती है। यदि केवल पूर्ण सांख्यिक मूल्यों में दर्ज किये गए ऐसे आंकड़े समावेशी वर्ग अंतरालों का प्रयोग करके वर्गीकृत किये जाएं (जैसे 155–159, 160–164, 165–169, आदि) तब वर्ग 160–164 में वे सब व्यक्ति सम्मिलित किये जाएंगे जिनकी वास्तविक ऊंचाई 159.5 से.मी. व 164.5 से.मी. के मध्य है। सीमाओं 159.5 तथा 164.5 को समावेशी वर्ग अंतराल 160–164 की अधः तथा ऊपरी सीमा तो केवल 160 तथा 164 है, जिनका प्रयोग वर्ग अंतराल लिखने में किया जाता है।

अतः किसी समावेशी वर्ग अंतराल की अधः परिसीमा उसकी अधः सीमा से 0.5 कम तथा ऊपरी परिसीमा उसकी ऊपरी सीमा से 0.5 अधिक होती है। जब खण्डित रूप में दर्ज किये गए अखण्डित चर समावेशी प्रकार के वर्ग अंतरालों का प्रयोग करके वर्गीकृत किये जाते हैं, तब वर्ग सीमाओं को वास्तविक सीमाओं में परिवर्तित करना आवश्यक होता है है।

10 संचयी आवृत्ति बंटन (Cumulative frequency distributions) :

संचयी आवृत्ति बंटन विभिन्न वर्गों के लिए उनकी वास्तविक आवृत्तियों को नहीं दिखाता, बल्कि उनकी संचयी आवृत्तियों को दिखाता है। प्रथम वर्ग अंतराल की संचयी आवृत्ति वहीं होती हैं, जो कि उसकी वास्तविक आवृत्ति है। दूसरे वर्ग अंतराल की संचयी आवृत्ति, प्रथम वर्ग अंतराल की आवृत्ति तथा दूसरे वर्ग अंतराल की आवृत्ति का योग करके प्राप्त की जाती है। इसी प्रकार अन्य विभिन्न वर्ग अंतरालों की संचयी आवृत्तियों का निश्चय किया जाता है।

उदाहरण 12 को ध्यानपूर्वक देखिए और अध्ययन कीजिए की आवृत्ति बंटन को किस प्रकार संचयी आवृत्ति बंटन में रूस्पान्तरित किया जाता है।

उदाहरण 12

संचयी आवृत्ति बंटन का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
0.10	15	15
10.20	25	15ृ 25 त्र 40
20.30	30	40ृ 30 त्र 70
30.40	20	70ृ 20 त्र 90
40.50	10	90ृ 10 त्र 100
योग	100	

संचयी आवृत्ति बंटन को उदाहरण 13 में दिखाए गए रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 13

संचयी आवृत्ति बंटन प्रस्तुतीकरण

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	15
20 से कम	40
30 से कम	70
40 से कम	90
50 से कम	100

संचयी आवृत्ति बंटन 'से कम' (less than) संचयी आवृत्ति बंटन हो सकता है या 'से अधिक' (more than) संचयी आवृत्ति बंटन हो सकता है। उदाहरण 13 में प्रस्तुत आवृत्ति बंटन 'से कम' संचयी आवृत्ति बंटन का एक उदाहरण है। इस प्रकार के आवृत्ति बंटन में आवृत्तियां आरोही क्रम में होती हैं। ''से अधिक'' संचयी आवृत्ति बंटन में अंतिम वर्ग अंतराल की आवृत्ति को उस वर्ग की संचयी आवृत्ति के रूप में लिया जाता है। अंतिम वर्ग अंतराल के पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति उस वर्ग की आवृत्ति को अगले वर्ग अंतराल की संचयी आवृत्ति में जोड़कर, प्राप्त की जाती है। इस प्रकार के बंटन में संचयी आवृत्तियां अवरोही क्रम में होती हैं। उदाहरण 14 को ध्यान से देखिए तथा अध्ययन कीजिए कि ''से अधिक'' संचयी आवृत्ति बंटन का परिकलन किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 14

'से अधिक आवृत्ति का परिकलन'

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
0.10	15	85. 15 त्र 100
10.20	25	60. 25 त्र 85
20.30	30	30. 30 त्र 60
30.40	20	10. 20 त्र 30
40.50	10	10
योग	100	

''से अधिक'' आवृत्ति बंटन को उदाहरण 15 के अनुसार भी व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 15

'से अधिक' आवृत्ति की प्रस्तुति

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 से अधिक	100
10 से अधिक	85
20 से अधिक	60
30 से अधिक	30
40 से अधिक	10

आपको यह ध्यान देना चाहिए कि ''से कम'' संचयी आवृत्तियों वर्ग अंतरालों की ऊपरी सीमाओं से संबंधित होती हैं तथा ''से अधिक'' संचयी आवृत्तियां वर्ग अंतरालों की अधः सीमाओं से संबंधित होती हैं।

बोध प्रश्न

1 अखण्डित चर तथा एक खण्डित चर में अंतर बताइए।

....

2 वर्ग अंतराल का वर्ग विस्तार क्या होता है?

....

3 वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु क्या होता है?

....

4 वर्ग अंतराल की आवृत्ति क्या होती है?

....

5 अपवर्जी तथा समावेशी आवृत्ति में अन्तर कीजिए।

....

6 ''से कम'' संचयी आवृत्ति बंटन तथा ''से अधिक'' संचयी आवृत्ति बंटन में अन्तर बताइए।

....

आवृत्ति बंटन की रचना ;Formation of a Frequency Distribution)

आपने आवृत्ति बंटन से संबंधित विभिन्न पदों का अध्ययन कर लिया है। आइए अब हम आवृत्ति बंटन के निर्माण से संबंधित क्रियाविधि का ब्यौरेवार अध्ययन करें।

आंकड़ों का क्रम विन्यास (Data Array)

आवृत्ति बंटन के निर्माण की प्रक्रिया में आंकड़ों का क्रम विन्यास पहला कदम है। आंकड़ों को आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना आंकड़ों का क्रम विन्यास कहलाता है। आंकड़ों का क्रम विन्यास इसलिए उपयोगी है, क्योंकि यह हमें आंकड़ों के सीमान्तर के विषय में सूचना प्रदान करता है तथा आंकड़ों की प्रकृति पर कुछ प्रकाश डालता है। किन्तु आंकड़ों का क्रम विन्यास तभी बहुत उपयोगी होता है जबकि प्रेक्षणों की संख्या बहुत न हो। बहुत बड़ी संख्या में प्रेक्षण होने की स्थिति में आंकड़ों का क्रम विन्यास बहुत दुःसाध्य हो जाएगा। उदाहरण 16 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए तथा समझने का प्रयत्न कीजिए कि आंकड़ों का क्रम विन्यास कैसे तैयार किया जाता है।

उदाहरण 16

विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों से संबंधित आंकड़ों का क्रम विन्यास कीजिए।

17, 21, 09, 26, 17, 10, 09, 26, 44, 18,

27, 28, 23, 35, 45, 36, 20, 13, 39, 29

30, 35, 29, 39, 41, 48, 40, 43, 33, 48

39, 15, 16, 47, 31, 49, 46, 48, 36, 14

हल :

एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को आरोही क्रम में निम्न प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है :

09 09 10 13 14 15 16 17 17 18 20 21 23 26 26 27 28 29 29 30 31 33 35 35 36 36 39 39 39 40 41 43 44 45 46 47 48 48 48 49

उदाहरण 16 में दिये गए आंकड़े क्रम विन्यास से हम विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अधिकतम व न्यूनतम अंकों के विषय में भलीभांति जान सकते हैं।

आवृत्ति–बंटन की रचना के चरण

जैसा की पहले बताया गया है, जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत बड़ी होती है, तो आंकड़ों का क्रम विन्यास दुःसाध्य हो जाता है। ऐसी स्थितियों में आंकड़ों के आकार को संघनित करने के लिए आवृत्ति बंटन का निर्माण किया जाता है। आवृत्ति बंटन का निर्माण करने से पूर्व निम्नलिखित कदम आवश्यक है।

i) वर्ग सीमाओं की स्पष्टतः पहचान करते हुए वर्ग अंतरालों का निर्माण।

ii) प्रत्येक मद ली जाती है तथा उपयुक्त वर्ग अंतराल के सम्मुख एक मिलान–दण्ड (Tally Bar) लगा दिया जाता है। मिलान–दण्ड एक उदग्र–दण्ड होता है। प्रत्येक मूल्य के लिये एक मिलान–दण्ड खींचा जाता है। जैसे I II III IIII

iii) जब चार मिलान–दण्ड खींच लिये गये हों, तब पांचवां दण्ड यहां दिखाई गई विधि के अनुसार आर–पार खींचा जाता हैः– IIII

iv) समस्त प्रेक्षणों को उपयुक्त वर्गों के सम्मुख रख दिये जाने के बाद, उनका योग किया जाता है तथा उसे

विशेष वर्ग अंतराल की आवृत्ति के रूप में दर्ज कर दिया जाता है।

उदाहरण 17

उदाहरण 16 में दिये गए आंकड़ों के लिए एक आवृत्ति बंटन बनाइये। 0–10 को पहले वर्ग अंतराल के रूप में लीजिए।

हल :

पहले वर्ग अंतराल का आकार 10 है तथा सबसे बड़ी मद का मूल्य 49 है। बराबर लम्बाई की समस्त वर्ग अंतरालों को लेते हुए अन्य वर्ग अंतराल 10–20, 20–30, 30–40, 40–50 होंगे। आपको ध्यान देना चाहिए कि दिये हुए आंकड़े खण्डित हैं, किन्तु तब भी अपवर्जी वर्ग अंतराल लिये गए हैं, जोकि उपयोगीन में सर्वाधिक सर्वसामान्य विधि है। वर्ग अंतराल 0–10 का अर्थ 0 तथा 10 से कम है। अतः इसमें 0 से 9 तक के मूल्य वाली समस्त मदें सम्मिलित हैं। इसी प्रकार अन्य वर्ग अंतरालों में 10 से 19 तक के मूल्यों वाली, 20 से 29 तक के मूल्यों वाली, आदि मदें सम्मिलित होंगी।

सांख्यिकी में प्राप्त अंकों का आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	मिलान–दण्ड	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	II	2
10-20	~~IIII~~ III	8
20-30	~~IIII~~ IIII	9
30-40	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
40-50	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
योग		40

वर्ग अंतरालों के चुनाव के लिए मार्गदर्शक नियम

यदि वर्ग अंतराल नहीं दिये गए हैं, तो उनकी संख्या और चौड़ाई का निश्चय निम्नलिखित मार्गदर्शक नियमों के आधार पर किया जा सकता है।

i) आंकड़ों की सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी मद का पता लगाइये। उनका अन्तर निकालिए। यह आंकड़ों का सीमांत (range) प्रदान करता है।

ii) मदों की संख्या की गिनती कीजिए तथा स्टर्जिज के नियम अथवा सुविधानुसार वर्गों की संख्या 'K' का निश्चय कीजिए।

iii) सीमान्तर को वर्गों की संख्या 'K' से विभाजित कीजिये। भागफल को 'C' कह सकते हैं। यह मूल्य 'C' वर्ग अंतरालों की चौड़ाई के विषय में निश्चय करने का आधार होगा।

iv) सामान्यतः समस्त वर्ग अंतरालों की चौड़ाई समान होनी चाहिये तथा वर्ग अंतराल की सीमाएं पूर्णांक होनी चाहिए अर्थात, जैसे 5 या 10 का गुणज। अतः वर्ग अंतरालों की दो संभव सीमाएं श्पश एक पूर्णांक जो कि 'C' से एकदम कम है, लघुतम सीमा होगी तथा श्ब्श से एकदम अधिक एक पूर्णांक ऊपरी सीमा होगी।

v) प्रथम वर्ग अंतराल का आरंभिक बिन्दु एक पूर्णांक को लिया जाना चाहिये, जोकि लघुतम मद से एकदम कम

हो, अथवा यदि आंकड़ों की यह लघुतम मद स्वयं एक पूर्णांक है, जो उसके बराबर हो।

vi) अब ऊपर दिये गए पद के अन्तर्गत निश्चित किये गए आरंभिक बिन्दु को लेते हुए, पद iv) के अन्तर्गत निश्चय किये गए 'i' के उपयुक्त मूल्यों की सहायता से वर्ग अंतराल के पूर्ण कुलकों को लिखिये। इन कुलकों में से वह कुलक (set) जिसमें वर्ग अंतरालों की संख्या 'K' है एक आदर्श कुलक माना जाएगा। यदि किसी भी कुलक में 'K' वर्ग अंतराल नहीं है, तो वह कुलक, जिसमें 'k-2' से k+2 संख्याओं के बीच वर्ग अंतरालों की संख्या है, चुना जाता है।

उदाहरण 18

एक कक्षा के विद्यार्थियों के भार (किलोग्राम में) से संबंधित निम्नलिखित आंकड़ों से समावेशी रीति द्वारा एक आवृत्ति बंटन बनाइए।

42	47	48	50	41	61	57	52	57
47	41	59	60	63	42	44	45	46
57	47	57	53	48	47	56	61	56
62	49	58	52	55	42	42	56	51
43	48	51	54	52	60	62	63	61

हल :

वर्ग अंतरालों की संख्या नहीं दी गई है, अतः पहले वर्ग अंतरालों की संख्या और चौड़ाई का निश्चय करें।

i) न्यूनतम भार 41 कि.ग्रा. है तथा अधिकतम भार 63 कि.ग्रा. है। अतः सीमान्तर 22 है।

ii) मदों की संख्या 45 है। अतः स्टर्जिज के नियम के अनुसार वर्ग अंतरालों की संख्या निम्न प्रकार से परिकलित की जा सकती है :

k =1+3.3 log 45

=1+3.3x1.65

=6.4

=7 (उपसादित)

iii) वर्ग अंतरालों की संभव चौड़ाई होगी।

C= सीमान्तर ÷ K

=22 ÷ 7

=3.1

vi) 3.1 से अधिक पूर्णांक 5 है तथा 3.1 से कम पूर्णांक 0 है। अतः वर्ग अंतराल श्पश की लम्बाई 5 है। यहां हमारे पास श्पश का केवल एक मूल्य है।

v) चूंकि लघुतम मूलय 41 है, अतः पहला वर्ग अंतराल 40 से आरंभ होगा। इसलिए समावेशी आकार और प्रकार के 5 के माप वाले विभिन्न वर्ग अंतराल 40–44, 45–49, 50–54, 54–59 तथा 60–64 होंगे। यहां अंतिम वर्ग अंतराल 60–64 है क्योंकि सबसे बड़ी मद 63 है।

vi) इस कुलक में वर्ग अंतरालों की संख्या 5 है। यह इसकी आदर्श संख्या "K" के बराबर नहीं है, फिर भी किन्तु यह K-2 से K+2 (अर्थात् 5 से 9) की सीमाओं के भीतर है। अतः हम आवृत्ति बंटन बनाने का कार्य कर

सकते हैं।

आवृत्ति बंटन (समावेशी विधि द्वारा)

भार (कि.ग्रा.)	मिलान–दण्ड	विद्यार्थियों की संख्या
40-44	~~IIII~~ III	8
45-49	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
50-54	~~IIII~~ III	8
55-59	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
60-64	~~IIII~~ IIII	9
योग		45

उदाहरण 19

20 विद्यार्थियों के आन्तरिक मूल्यांकन के आधार पर प्राप्त अंकों (x) व तथा अंतिम परीक्षा में प्रतिशतता (y) से संबंधित निम्नलिखित आंकड़ों के लिए द्विचर आवृत्ति बंटन बनाइए

X रू 13 13 12 10 11 13 12 12 14 12 13 14 13 14 10 12 11 11 12 13

Y रू 56 72 60 12 20 52 43 50 60 58 54 78 81 69 38 47 41 45 49 63

हल :

आंतरिक मूल्यांकन में अंकों (x) के केवल 5 विभिन्न मूल्य, 10, 11, 12, 13 तथा 14 हैं। अतः इनमें से प्रत्येक को एक समूह का प्रतिनिधित्व करने के लिए लिया जाएगा।

अंतिम परीक्षा में अंकों की प्रतिशतता का न्यूनतम अंक 12 है तथा उच्चतम अंक 81 है, जिससे 69 का सीमान्तर प्राप्त होता है। स्टर्जिज के नियम के अनुसार 20 मदों के लिए वर्गों की आदर्श संख्या 5 होगी। अतः प्रत्येक वर्ग की सम्भाव्य लंबाई 69/5 या 14 होगी। पूर्णांकन के बाद इसे 15 माना जा सकता हैं चूंकि न्यूनतम प्रतिशतता (y) 12 है, अतः प्रथम वर्ग अंतराल की अधः सीमा 10 ली जाएगी। अतः y के लिए विभिन्न वर्ग अंतराल 10–25, 25–40, 40–55, 55–70 तथा 70–85 होंगे।

"x" चर को प्रथम पंक्ति में तथा "y" चर को प्रथम स्तम्भ में लिखने पर द्विचर बंटन की रूपरेखा बनेगी। अब द्विचर आवृत्ति बंटन बनाने के लिए, आवृत्तियों की संख्या का निश्चय "x" तथा "y" के संगत मूल्यों को आबंटित करके तथा मिलान–दण्ड खींचकर किया जाएगा। "x" तथा "y" के संगत मूल्यों के प्रथम कुलक में 13 तथा 56 के मूल्य हैं। अतः कोष्ठक में, जिसके स्तम्भ को 13 से भरा गया है तथा जिसकी पंक्ति का शीर्षक 55–59 है, मिलान–दण्ड खींचा जाएगा। इसी प्रकार अन्य कोष्ठकों के लिए मिलान–दण्ड खींचे जाएंगे। विभिन्न कोष्ठकों को समस्त मूल्यों के आबंटन किये जाने तथा संबंधित मिलान–दण्डों के खींचे जाने के बाद, अपेक्षित द्विचरीय आवृत्ति बंटन निम्न प्रकार का होगा।

द्विचर आवृत्ति बंटन

अन्तिम परीक्षा में	आन्तरिक परीक्षा में अंक (x)	योग

प्रतिषतता (y)	10	11	12	13	14	
10-25	I = 1	I = 1				2
25-40	I = 1					1
40-55		II = 2	IIII = 4	II = 2		8
55-70			II = 2	II = 2	II = 2	6
70-85				II = 2	I = 1	3
योग	2	3	6	6	3	20

बोध प्रश्न

1 आंकड़ा क्रम विन्यास क्या होता है?

....

2 आवृत्ति बंटन के निर्माण में कौन–कौन से कदम होते हैं?

....

सारांश

वर्गीकरण का अर्थ आंकड़ों को समानताओं तथा साम्यताओं के आधार पर विभिन्न वर्गों में व्यवस्थित करना हैं यह दु:साध्य आंकड़ों को संक्षिप्त तथा सरल रीति से प्रस्तुत करने में सहायक होता हैं वर्गीकरण हमें सारणीयन तथा विश्लेषण का एक आधार प्रदान करता है तथा आंकड़ों की संभव विशेषताओं को पहचानने में सहायक होता हैं। वर्गीकरण गुणों के आधार पर अथवा चरों के आधार पर किया जा सकता है। गुणों के अनुसार वर्गीकरण आंकड़ों की गुणात्मक विशेषताओं पर आधारित होता है। सरल वर्गीकरण एक गुण के आधार पर किया जाता है, जबकि बहुगुणीय वर्गीकरण एक से अधिक गुणों के आधार पर किया जाता हैं चरों के आधार पर वर्गीकरण आंकड़ों की परिमाणन योग्य विशेषताओं के आधार पर किया जाता है। एक आवृत्ति बंटन एक चरीय, द्विचरीय अथवा बहुचरीय हो सकता है। आवृत्ति बंटन से संबंधित बहुत से पद हैं। खण्डित (असंतत/विच्छिन्न) चर का मूलयों के एक विशिष्ट सीमान्तर (खुले सिरे वाले के अतिरिक्त) के अन्दर कोई भी भिन्नात्मक मूल्य हो सकता हैं खुले सिरे वाले वर्ग अंतरालों के अतिरिक्त प्रत्येक वर्ग अंतराल की दो सीमाएं होती हैं : (i) अधः सीमा तथा (ii) ऊपरी सीमा। वर्ग का मध्य बिन्दु उसकी दो सीमाओं के आधे बीच में होता है। वर्ग अंतराल के वर्ग विस्तार का अर्थ उसकी दो सीमाओं के बीच का अन्तर होता है। वर्ग की आवृत्ति से तात्पर्य उस वर्ग की सीमाओं में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या होता है।

बंटन में वर्गों की संख्या वैज्ञानिक आधार पर निश्चित की जा सकती है। वर्गों की संख्या का निश्चिय करते समय उनकी चौड़ाई के विषय में भी निर्णय लिया जाना चाहिये। प्रथम वर्ग की अधः सीमा तथा अंतिम वर्ग की ऊपरी सीमा का अभाव खुले सिरे वाले वर्ग अंतराल का द्योतक है। अपवर्जी वर्ग अंतराल में, वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा उस वर्ग अंतराल से अपवर्जित की जाती है तथा अगले वर्ग अंतराल की अधः सीमा के रूप में ली जाती है। समावेशी वर्ग अंतराल में, वर्ग की ऊपरि सीमा भी उसी वर्ग में समाविष्ट की जाती है। अपवर्जी वर्ग में सीमाएं परस्परव्यापी होती हैं जबकि समावेशी वर्ग में वे गैर–परस्परव्यापी होती हैं। संचयी आवृत्ति बंटन में, वर्ग संचयी

आवृत्तियों को व्यक्त करते हैं ये ''से कम'' अथवा ''से अधिक'' संचयी आवृत्ति बंटन हो सकते हैं। आंकड़ा क्रम विन्यास आंकड़ा की आरोही क्रम में अथवा अवरोही क्रम में एक क्रमबद्ध व्यवस्था है। यह आंकड़ों के सीमान्तर तथा उनकी विशेषताओं के विषय में सूचना प्रदान करता है। आवृत्ति बंटन आंकड़ों के आकार संघनित करने के लिए बनाया जाता है।

स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

प्रश्न

1 वर्गीकरण के अर्थ तथा उद्देश्य की व्याख्या कीजिए साथ ही वर्गीकरण की विभिन्न विधियों का विवेचन कीजिए।

2 निम्नलिखित में से प्रत्येक पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

(i) खण्डित चर

(ii) वर्ग सीमाएं

(iii) एक वर्ग का मध्य बिन्दु

(iv) बंटन में वर्गों की संख्या

(v) खुले सिरे वाला बंटन

(vi) संचयी आवृत्ति बंटन

(vii) आंकड़ा क्रम विन्यास

अभ्यास

1 निम्नलिखित आंकड़ों का आरोही क्रम में क्रम विन्यास कीजिए:

3 19 27 25 23 21 19 17 15 13 11 9 10 26 34 32 30 28 26 24 22 20 18 16 15 31 29 27 25 13 23 21 19 17 15 11 18 28 26 24 22 20 18 16 14 12 10 8

2 निम्नलिखित आंकड़ों का अवरोही क्रम में क्रम विन्यास कीजिए:

3 19 27 25 23 21 19 17 15 13 11 9 10 26 34 32 30 28 26 24 22 20 18 16 15 31 29 27 25 13 23 21 19 17 15 11 18 28 26 24 22 20 18 16 14 12 10 8

3 निम्नलिखित आंकड़ों से विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों से प्रथम वर्ग अन्तराल 0–19 लेते हुये समावेषी रीति द्वारा आवृत्ति बंटन बनाइये:

55 33 35 5 23 37 73 75 87 29 97 80 66 53 87 71 4 25 93 66 47 93 81 29 58 66 59 62 29 61 21 37 46 27 42 71 52 78 27 47 16 49 91 9 38 7 11 61

4 निम्नलिखित आंकड़ों से विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों से प्रथम वर्ग अन्तराल 0–10 लेते हुये अपवर्जी रीति द्वारा आवृत्ति बंटन बनाइये:

55 33 35 5 23 37 73 75 87 29 97 80 66 53 87 71 4 25 93 66 47 93 81 29 58 66 59 62 29 61 21 37 46 27 42 71 52 78 27 47 16 49 91 9 38 7 11 61

5 निम्नलिखित आंकड़ों से खंडित श्रेणी में आवृत्ति बंटन बनाइये:

15 17 18 20 22 24 21 17 16 15 21 22 23 22 17 22 18 22 19 20

6 निम्नलिखित आंकड़ों से वर्ग विस्तार 10 लेते हुए अखंडित श्रेणी में आवृत्ति बंटन बनाइयेः

2 0 9 11 15 17 19 21 25 26 23 22 27 28 35 45 32 33 31 34

7 निम्नलिखित श्रेणी को समान वर्गान्तर में बदलिये फिर उससे 'से कम' तथा 'से अधिक' संचयी आवृत्ति बंटन बनाइयेः

आय	परिवारों की संख्या
0.5	3
5.6	2
6.9	7
9.12	5
12.14	16
14.18	12
18.20	15
20.24	20
24.25	8
25.30	10
30.36	2

8 स्टर्जेस के नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित आंकड़ों से आवृत्ति बंटन बनाइयेः

110 108 165 103 113 140 42 167 149 87 175 164 133 150 69 144 30 124 104 40 161 128 195 162 121 71 62 164 187 122 157 114 151 149 93 94 138 146 184 203 155 178 141 79 143 87 156 116 197 148

9 एक आवृत्ति बंटन में 6 वर्गान्तर हैं, जिनकी आवृत्तियां क्रमषः 3, 9, 15, 30, 18 एवं 5 हैं। तीसरे वर्गान्तर की निचली सीमा 20 है, जबकि पांचवे वर्गान्तर का माध्य बिन्दु 45 है। आवृत्ति बंटन की संरचना कीजिये।

10 निम्नलिखित आंकड़े नवविवाहित पति–पत्नियों की आयु दर्षाते हैं। एक द्विचर आवृत्ति बंटन बनाइयेः

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पति की आयु	24	26	27	25	28	24	27	28	25	26
पत्नी की आयु	22	23	24	22	25	23	23	24	23	24
क्रम संख्या	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
पति की आयु	25	26	27	23	27	26	25	26	26	26

पत्नी की आयु	22	23	24	24	25	24	22	25	22	23

(2) सारणीयण

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- सारणीयण के अर्थ की व्याख्या कर सकें
- सारणीयण के उद्देश्यों और विधियों का वर्णन कर सकें
- सारणीयण से सम्बन्धित विभिन्न पदों का वर्णन कर सकें
- सारणीयण तैयार कर सकें।

संग्रहीत आंकड़े अव्यवस्थित दशा में होते हैं अतः आप उनका निर्वचन नहीं कर सकते, न ही उनसे उपयोगी निष्कर्ष निकाल सकते हैं। अतः संग्रहीत आंकड़ों के आधार पर उपयोगी निष्कर्ष निकालने के लिए यह आवश्यक है कि आंकड़ों को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत किया जाए। आंकड़ों का सारणीयण आंकड़ों के समूह को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत करने में हमारी सहायता करता है। इस इकाई में आप सारणीयण के अर्थ व उद्देश्य तथा उसकी विभिन्न रीतियों के विषय में पढ़ेंगे। आप विभिन्न प्रकार के सारणीयण के विषय में तथा उनके निर्माण की विधियों के विषय में भी जानकारी प्राप्त करेंगे।

सारणीयण का अर्थ

आप जान चुके हैं कि आंकड़ों को उनकी समानता और समरूपता के आधार पर व्यवस्थित करके वर्गों या विभागों में प्रस्तुत करने की क्रिया को वर्गीकरण (classification) कहते हैं। इसी प्रकार जब दो चर मूल्यों को विभिन्न स्तम्भों (columns) एवं पंक्तियों (rows) द्वारा क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित रुप में प्रस्तुत किया जाता है तो यह प्रस्तुतिकरण सांख्यिकीय सारणीयण (statistical tabulation) कहलाता है। गुणात्मक विषेषताओं से सम्बन्धित संमंकों के लिए भी ऐसी सारणी बनाई जा सकती है।

सांख्यिकीय सारणी की संरचना एवं सारणी के मुख्य अंग

जब दो मूल्यों को विभिन्न स्तम्भों (columns) एवं पंक्तियों (rows) द्वारा क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित रुप में प्रस्तुत किया जाता है तो यह प्रस्तुतिकरण सांख्यिकीय सारणीयण (statistical tabulation) कहलाता है। किसी भी सांख्यिकीय सारणी में मुख्यतः निम्न अंग होते हैं:–

1 शीर्षक (title or heading) : प्रत्येक सांख्यिकीय सारणी का एक शीर्षक लिखा जाता है। यह संक्षिप्त परन्तु सुस्पष्ट होना चाहिये।

2 सारणी संख्या (table number) : प्रत्येक सांख्यिकीय सारणी को एक संख्या प्रदान कर दी जाती है जिससे कि उसे सरलता से पहचाना जा सके।

3 शीर्ष टिप्पणी (head Note) : इसे शीर्षक से बिल्कुल नीचे आमतौर पर दाहिने किनारे पर लिखा जाता है। इससे उस इकाई का संकेत होता है, जिसमें आंकड़े प्रदर्शित किए गए हैं।

4 पंक्ति शीर्षक (Stub Note) : जैसा कि आप जानते हैं कि सांख्यिकीय सारणी आंकड़ों को स्तम्भों तथा पंक्तियों में क्रमबद्ध करके प्रस्तुत करती है। पंक्तियों के शीर्षक को पंक्ति शीर्षक कहते हैं। पंक्ति शीर्षक का बड़ा स्पष्ट उल्लेख होना चाहिए। इससे सारणी की हर पंक्ति में दी गई सामग्री की प्रकृति का स्पष्ट संकेत मिलना चाहिए।

5 स्तंभ शीर्षक (Caption Note) : स्तम्भों के शीर्षक स्तम्भ शीर्षक कहलाते हैं। इन्हें बाक्स शीर्षक (Box Head) भी कहते हैं। इससे सारणी के किसी खाने में प्रदर्शित आंकड़ों की प्रकृति का संकेत मिलता है। स्तम्भ शीर्षक बड़े ही स्पष्ट रूप से अंकित होना चाहिए। प्रत्येक स्तम्भ शीर्षक के उप–शीर्षक भी हो सकते हैं।

6 कलेवर या क्षेत्र (Body or Field) : सारणी का कलेवर सारणी का सबसे महत्वपूर्ण भाग है। स्तम्भों तथा पंक्तियों में दी गई सूचना से सारणी का कलेवर बनता है। समस्त संख्यात्मक तथ्यों का प्रदर्शन इसी भाग में होता है।

7 पाद टिप्पणी (Foot Note) : सारणी की विषय सामग्री से संबंधित कोई भी व्याख्यात्मक सूचना, जो कि सारणी के बिल्कुल नीचे दी गई हो, पाद टिप्पणी कहलाती है। इसका मुख्य उद्देश्य सारणी में दी गई विशिष्ट मदों को स्पष्ट करना होता है अथवा यदि सारणी में दी गई मदों में कोई संदिग्धता या त्रुटि हो तो उसकी व्याख्या करना होता है।

8 संदर्भ टिप्पणी (reference) अथवा स्त्रोत (source) : यदि आंकड़े द्वितीयक स्त्रोतों से प्राप्त किए गए हैं तो ऐसी स्थिति में सारणी के नही आंकड़ों के स्त्रोतों की जानकारी देने के लिए एक टिप्पणी दी जाती है। ऐसी टिप्पणी को संदर्भ टिप्पणी कहते हैं। इसे सारणी के नीचे तथा पाद टिप्पणी के साथ दिया जाता है। इस टिप्पणी को बहुत ही स्पष्ट एवं सुनिश्चित होना चाहिए क्योंकि यही आंकड़ों की विश्वसनीयता के परीक्षण का आधार बन जाती है।

9 योग (Total) : सारणी में सभी पंक्तियों एवं स्तम्भों में अंकित आंकड़ों के योग को दर्शाने की व्यवस्था भी होनी चाहिए।

सांख्यिकीय सारणी के आवश्यक गुण

आइए, अब हम अच्छी सारणी की विशेषताओं का अध्ययन करें। सारणी तैयार करने के कुछ सामान्य मार्गदर्शक नियम होते हैं, जिनका उल्लेख नीचे किया गया है :

1. अच्छी सारणी द्वारा आंकड़े स्पष्ट एवं सरल ढंग से प्रस्तुत किए जाने चाहिए।

2 इसका एक संक्षिप्त एवं स्पष्ट ''शीर्षक'' होना चाहिए, जो कि स्वतः स्पष्ट हो और इससे यह भी पता चल सके कि सारणी में किस प्रकार के आंकड़े दिखाए गए हैं।

3 पंक्ति शीर्षक, उसकी प्रविष्टियां, स्तम्भ शीर्षक आदि संक्षिप्त एवं स्पष्ट होने चाहिए। विषय के शीघ्र संदर्भ के लिए स्तम्भों पर क्रम संख्या लिख देनी चाहिए।

4 शीर्ष टिप्पणी स्पष्ट एवं पूर्ण होनी चाहिए क्योंकि इससे आंकड़ों की इकाई का ज्ञान होता है।

5 योगों और उप–योगों की व्यवस्था सारणी में उपयुक्त स्थानों पर होनी चाहिए।

6 संदर्भ टिप्पणियां स्पष्ट होनी चाहिए, जिससे कि आवश्यकता पड़ने पर आंकड़ों की विश्वसनीयता की पुष्टि की जा सके।

7 सारणी ऐसी होनी चाहिए जिसमें कि आवश्यकता पड़ने पर व्युत्पन्न आंकड़े (derived data) अर्थात् अनुपात, प्रतिशतता, औसत आदि का भी समावेश किया जा सके।

8 जहां तक संभव हो, सांख्यिकीय सारणी में संकेताक्षरों (abbreviations) का प्रयोग नहीं होना चाहिए। हां, यदि संकेताक्षर का प्रयोग आवश्यक ही है तो उनकी पूर्ण व्याख्या पाद टिप्पणी में दी जानी चाहिए।

9 जहां आवश्यक हो, सारणी में रेखाएं खींची जानी चाहिए। सामान्यतः स्तम्भों को रेखाओं द्वारा एक–दूसरे से पृथक किया जाता है। रेखाएं सारणी को आकर्षक, रोचक एवं पठनीय बना देती और इनसे आंकड़ों के

संबंध भी अधिक स्पष्ट होते हैं। सारणी के शीर्ष तथा आधार पर और स्तम्भों के नीचे भी रेखाएं खींची जाती हैं।

10 यथोपरि (अर्थात् जैसे ऊपर) जैसे संकेत का प्रयोग सारणी में नहीं किया जाना चाहिए।

11 स्तम्भ तथा पंक्तियां, जिनकी सामग्री की एक–दूसरे से तुलना की जानी है, पास–पास रखी जानी चाहिए।

12 यदि कुछ वर्गों के सापेक्ष महत्व को भी दर्शाना आवश्यक हो तो इसके लिए मोटे अक्षर, टेढ़े, अक्षर, कुछ स्थान रिक्तता की विधियों का उपयोग करना चाहिए।

13 खानों में अंकित संख्याएं एक सीध में होनी चाहिए। यदि दशमलवों, + या – चिन्ह का उपयोग हुआ है तो उन्हें भी सुनियोजित ढंग से एक सीध में होना चाहिए।

14 सामान्यतः एक सारणी में चार, पांच से अधिक विशेषताओं के आधार पर आंकड़ों को प्रस्तुत नहीं करना चाहिए, अन्यथा इसका स्परूप बहुत ही जटिल बन जाएगा।

सांख्यिकीय सारणी की रचना

अब तक हमें एक अच्छी सारणी के लक्षणों एवं उसके मुख्य अंगों की जानकारी हो चुकी है। अतः अब हम कुछ उदाहरणों के द्वारा सारणी की रचना विधि को समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 1

सन् 2008 में एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों के अंक, आयु एवं लिंग के आधार पर एक रिक्त सारणी तैयार कीजिए। अंकों के वर्ग अंतराल 0–10, 10–20, 20–30, 30–40, और 40–50 लिए जाने चाहिए तथा आयु 17 वर्ष, 18 वर्ष, 19 वर्ष तथा 20 वर्ष ली जानी चाहिए।

हल :

सारणी में विद्यार्थियों को उनके द्वारा प्राप्त अंक, उनकी आयु एवं लिंग के आधार पर प्रदर्शित करना है। अंकों को पंक्तियों, आयु को स्तम्भों एवं लिंग को उप–स्तम्भों द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है। इन सूचनाओं के प्रदर्शन के लिए रिक्त सारणी का स्वरूप निम्न प्रकार का होगा :

सारणी संख्या 1.1

सन् 2008 में विद्यार्थियों का प्राप्तांक, आयु एवं लिंग के अनुसार बंटन

अंक	आयु (वर्षों में)								योग	
	17		18		19		20			
	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री
0.10										
10.20										
20.30										
30.40										

40.50											
योग											

पाद टिप्पणी :

स्त्रोत :

उदाहरण 2

वर्ष 2005–06 में विभिन्न विनिर्माताओं द्वारा निर्मित कुल कारों के उत्पादन में मारुति उद्योग का भाग 48.4 प्रतिशत, प्रीमियर ऑटो का भाग 28.5 प्रतिश्यात तथा हिन्दुस्तान मोटर्स का भाग 22.6 प्रतिशत था। वर्ष 2006–07 में हिन्दुस्तान मोटर्स का भाग घटकर 18 प्रतिशत रह गया जबकि मारुति उद्योग का भाग बढ़कर 59.2 प्रतिशत हो गया। अन्य कार विनिर्माताओं का भाग 1986–87 में केवल 1.2 प्रतिशत था। इन आंकड़ों को सारणीबद्ध कीजिए।

हल :

यहां पर आंकड़े प्रतिशतताओं में दिए गए हैं। वर्ष 2005–06 में मारुति उद्योग, प्रीमियर ऑटो एवं हिन्दुस्तान मोटर्स (तीनों को मिलाकर) का उत्पादन कुल कारों के उत्पादन का 95.5 प्रतिशत था। अतः शेष 0.5 प्रतिशत कारों का उत्पादन अन्य विनिर्माताओं द्वारा किया गया था। 2006–07 में हिन्दुस्तान मोटर्स का भाग 22.6 प्रतिशत से घटकर 18 प्रतिशत रह गया, जबकि मारुति उद्योग का भाग 48.4 प्रतिशत से बढ़कर 59.2 प्रतिशत हो गया और अन्य उत्पादकों का हिस्सा 0.5 प्रतिशत से बढ़कर 1.2 प्रतिशत हो गया। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि वर्ष 2006–07 में शेष उत्पादन अर्थात् 21.8 प्रतिशत भाग प्रीमियर ऑटो का है। इन सूचनाओं को नीचे दी गई सारणी द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है :

सारणी संख्या 2.1

भारत में कार उत्पादन में विभिन्न विनिर्माताओं का भाग (प्रतिशत)

कार विनिर्माता का नाम	2005–06	2006–07
1 मारुति उद्योग	48.4	59.2
2 प्रीमियर ऑटो	28.5	21.6
3 हिन्दुस्तान मोटर्स	22.6	18.0
4 अन्य	0.5	1.2
योग	100.0	100.0

स्त्रोत :

उदाहरण 3

चालू पंचवर्षीय योजना में श्रम एवं श्रम कल्याण के लिए केन्द्रीय सरकार का परिव्यय 9,510 लाख रुपये था। इसमें से 4,184 लाख रुपये प्रशिक्षण के लिए 546 लाख रुपये रोजगार सेवाओं के लिए, 3180 लाख रुपये श्रम कल्याण के लिए और 1,600 लाख रुपये बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास के लिए थे। 2006–07 के लिए कुल परिव्यय 1,847 लाख रुपये था। इसमें से 465 लाख रुपये प्रशिक्षण पर 107 लाख रुपये रोजगार सेवाओं पर, 755 लाख रुपये श्रम कल्याण पर और शेष राशि बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर व्यय की जानी थी। वर्ष 2006–07 की तुलना

में 2007–08 में परिव्यय 49 लाख रुपये अधिक था। वर्ष 2006–07 की तुलना में वर्ष 2007–08 के लिए रोजगार सेवाओं पर 11 लाख रुपये, श्रम कल्याण पर 148 लाख रुपये तथा बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर 327 लाख रुपये के परिव्यय की कमी हुई। किन्तु उपरोक्त राशियों में अनुसूचित जातियों और अनुसूचित जनजातियों के प्रशिक्षण और पथप्रदर्शन पर खर्च की जाने वाली राशि को निवेश की राशि में शामिल नहीं किया गया है। यह सूचना भारत सरकार के योजना आयोग द्वारा प्रकाशित वार्षिक योजना 2007–08 से ली गई है। इन तथ्यों को सारणीबद्ध कीजिए।

हल :

चालू पंचर्षीया योजना में परिव्यय की जाने वाली कुल राशि मदों के अनुसार अलग–अलग दी हुई हैं किन्तु वर्ष 2006–07 के लिए बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर खर्च की जाने वाली राशि अलग से नहीं दी गई हैं यह शेषांक है। वर्ष 2006–07 में परिव्यय की कुल राशि 1847 लाख रुपए थी तथा अन्य सब मदों पर परिव्यय की कुल राशि 1327 लाख रुपये (अर्थात प्रशिक्षण 465 लाख रुपये, रोजगार सेवाओं पर 107 लाख रुपये तथा श्रम कल्याण पर 755 लाख रुपये) थी। बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास के लिए परिव्यय की राशि 520 लाख रुपये (शेषांक) थी। यह कहा गया है कि 2006–07 की तुलना में वर्ष 2007–08 के लिए निवेश की राशि 49 लाख रुपये बढ़ा दी गई है अर्थात् वर्ष 2007–08 के लिए परिव्यय कर राशि (1847+49) 1896 लाख रुपये होगी। रोजगार सेवाओं पर परिव्यय में 11 लाख रुपयों की कमी की गई है अर्थात् इस वर्ष में इस पर परिव्यय की राशि 107 लाख रुपये से घटकर 96 लाख रुपये रह जाएगी। इसी प्रकार श्रम कल्याण पर परिव्यय में भी 148 लाख रुपये की कटौती की गई है अर्थात् इस मद पर परिव्यय 755 लाख रुपये के स्थान पर अब केवल 607 लाख रुपये होगा। बंधुवा मजदूरों के पुनर्वास पर परिव्यय की राशि में 327 लाख रुपये की कटौती की गई है अर्थात् इस पर निवेश की राशि केवल 193 लाख रुपये होगी। इससे यह भी स्पष्ट होता है कि वर्ष 2007–08 के लिए प्रशिक्षण के लिए परिव्यय 1,000 लाख रुपये (शेषांक) होगा। इन तथ्यों को नीचे दी गई सारणी द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है।

सारणी संख्या 3.1

केन्द्र द्वारा श्रम एवं श्रम कल्याण पर परिव्यय

(लाख रुपयों में)

खर्च के शीर्ष	चालू पंचवर्षीय योजना	2006–07	2007–08
1 प्रशिक्षण	4184	465	1,000
2 रोजगार सेवाएं	546	107	96
3 श्रम कल्याण	3,180	755	607
4 बंधुआ मजदूरों का पुनर्वास	1,600	520	193
योग	9,510	1,847	1,896

टिप्पणीः उपरोक्त परिव्यय में अनुसूचित जातियों और अनुसूचित जनजातियों के प्रशिक्षण तथा मार्गदर्शन पर व्यय की जाने वाली राशि को शामिल नहीं किया गया है।

स्त्रोतः ऐनुअल प्लान 2007–08, योजना आयोग, भारत सरकार, पृष्ठ 335

बोध प्रश्न

1 शीर्षक एवं शीर्ष टिप्पणी में अंतर समझाइए।

....

2 स्तम्भ शीर्षक एवं पंक्ति शीर्षक में अंतर बताइए।

....

3 पाद टिप्पणी एवं संदर्भ टिप्पणी में अंतर समझाइए।

....

4 सारणी का कलेवर (body) क्या होता है?

....

5 कोष्ठक में दिए गए उपयुक्त शब्दों से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

i) सारणी का शीर्षक.................होना चाहिए। (बड़े से बड़ा / छोटे से छोटा)

ii) शीर्ष टिप्पणी सारणी के शीर्षक के बिल्कुल नीचे सामान्यतः .... किनारे पर लिखनी जानी चाहिए। (दाएं / बायें)

iii) सारणी में पंक्तियों के शीर्षक को.................कहते हैं। (स्तम्भ शीर्षक / पंक्ति शीर्षक)

iv) स्तम्भ शीर्षक से.................में प्रदर्शित आंकड़ों का संकेत मिलता है। (स्तम्भों / पंक्तियों)

v) प्रत्येक सारणी में उसके नीचे ''सारणी संख्या'' देना.................होता है। (आवश्यक / अनावश्यक)

vi) स्तम्भ शीर्षकों को क्रमांकित.................जा सकता है। (किया / नहीं किया)

vii) शीर्ष टिप्पणी का संबंध आंकड़ों की.................से होता है। (इकाई / विशेषताओं)

viii) सांख्यिकीय सारणी बनाते समय यथोपरि (जैसे ऊपर) संकेत.................करना चाहिए। (का प्रयोग / का प्रयोग नहीं)

सारांश

सारणीयन आंकड़ों को स्तम्भों एवं पंक्तियों में सुव्यवस्थित ढंग से क्रमबद्ध करने की एक तकनीक हैं आंकड़ों के क्षैतिज (hornzontal) विन्यास को पंक्ति तथा उदग्र (vertical) विन्यास को ''स्तम्भ'' कहा जाता हैं साणीबद्ध आंकड़ों की तुलना करने में वांछि मूल्यों को पहचानने में, विश्लेषण का आधार प्रदान करने में तथा आंकड़ों की प्रवृति दर्शाने में बड़े उपयोगी सिद्ध होता है। अनेक लोग सारणीयन तथा वर्गीकरण को एक दूसरे का पर्यायवाची मानते हैं, किन्तु ऐसा मानना सही नहीं है। वर्गीकरण में आंकड़ों को समानता एवं समरूपता के आधार पर बांटा जाता है जबकि सारणीयन वर्गीकरण आंकड़ों को स्तम्भों एवं पंक्तियों में दर्ज करने की प्रक्रिया है।

सांख्यिकीय सारणियां विभिन्न प्रकार की हो सकती हैं जैसे– सूचनात्मक या सामान्य उद्देश्य वाली सारणी, या विशेष उद्देश्य वाली सारणी। गुणों या विशेषताओं की संख्या के आधार पर सूचनात्मक सारणियों को दो भागों में बांटा जा सकता है : (i) सरल या एक गुण वाली सारणी तथा (ii) जटिल सारणी। सरल सारणी में आंकड़ों के केवल एक गुण या विशेषता को तथा जटिल सारणी में एक से अधिक गुणों को प्रदर्शित किया जाता है। जटिल सारणी को तीन प्रकार से विभाजित किया जा सकता है : (i) द्विगुण सारणी, (ii) त्रिगुण सारणी, (iii) बहुगुणा सारणी। सामान्य उद्देश्य वाली सारणियां एक प्रकार से सूचनाओं का भंडार गृह होती है। और ये प्रायः विभिन्न प्रतिवेदनों के साथ परिशिष्ट के रूप में लगी होती हैं। विशेष उद्देश्य वाली सारणियां सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए बड़ी उपयोगी होती हैं। इनमें दरों प्रतिशतताओं माध्यों आदि का उल्लेख मूल अंकों के साथ या उनके स्थान पर होता है।

सारणी के अनेक भाग या अंग होते हैं। जैसे –शीर्षक, शीर्ष टिप्पणी, स्तम्भ शीर्षक, पंक्ति शीर्षक, कलेवर (body), पाद–टिप्पणी, संदर्भ टिप्पणी योग, सारणी क्रमांक, आदि। एक अच्छी सारणी में आंकड़ों का प्रदर्शन सरल एवं स्पष्ट होना चाहिए, उसके स्तम्भ शीर्षक एवं पंक्ति शीर्षक संक्षिप्त एवं स्पष्ट होने चाहिए। उसकी शीर्ष टिप्पणी संक्षिप्त एवं पूर्ण होनी चाहिए, उसकी संदर्भ टिप्पणी स्पष्ट होनी चाहिए। तथा सभी योग (totals) उप–योग (sub-totals) सारणी में उपयुक्त स्थान पर लिखे जाने चाहिए। आवश्यकता के अनुसार व्युत्पन्न आंकड़े (derived data) भी दिखाये जाने चाहिा तथा सारणी में संकेताक्षरों एवं यथोपरि जैसे संकेतों के उल्लेख से बचना चाहिए। जहां कहीं आवश्यक हो, सारणी को उपयोगी और आकर्षक बनाने के लिए रेखाएं डाल देनी चाहिए।

स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

1 सारणीयन क्या होता है? सांख्यिकीय सारणियों के उद्देश्य क्या होते हैं?

....

....

2 सांख्यिकीय सारणी का प्रारूप तैयार कीजिए और उसमें उसके विभिन्न अंगों को इंगित कीजिए।

....

....

3 जटिल एवं सरल सांख्यिकीय सारणियों में अंतर स्पष्ट कीजिए तथा उसके उपयुक्त उदाहरण दीजिए।

....

....

4 अच्छी सांख्किीय सारणी के आवश्यक गुणों का उल्लेख कीजिए।

....

....

अभ्यास

1 एक नगर के निवासियों को उनकी आयु, लिंग एवं साक्षरता के स्तर का दिखाने के लिए एक रिक्त सांख्यिकीय सारणी तैयार कीजिए।

2 एक संगठन में 1,000 कर्मचारी हैं, जिनमें 40 प्रतिशत स्त्री कर्मचारी हैं, कुल कर्मचारियों का 30 प्रतिशत धूम्रपान करते हैं किन्तु इनमें स्त्रियां केवल 10 है। इन तथ्यों से सारणी बनाइए।

3 निम्नलिखित आंकड़े भारत के चार महानगरों में अपराधों की संख्या (संख्याएं निकटतम हजारों तक) से संबंधित हैं। 1961 बंबई में सबसे अधिक अपराध दर्ज किए गए, जिनकी संख्या 19,400 थी, इसी अवधि में कलकत्ता, दिल्ली तथा मद्रास में क्रमशः 14,200, 10,000 तथा 5,700 अपराध दर्ज किए गए। सन् 1961 की तुलना में सन् 1971 में बंबई, दिल्ली, मद्रास में क्रमशः 5,700, 6,400 तथा 1,500 अधिक अपराध दर्ज किए गए। किनतु इसी अवधि में कलकत्ता में अपराधों की संख्या गिरकर 10900 रह गई। 1981 में बंबई में कुल 36,300 अपराध दर्ज हुए। इसी वर्ष दिल्ली में बंबई की अपेक्षा अपराधें की संख्चया 7,000 कम थी। 1971 की अपेक्षा 1981 में कलकत्ता में अपराधों की संख्या में 3,100 की वृद्धि हुई। 1971 की तुलना में 1981 में मद्रास में अपराधों की संख्या में 8,500 की वृद्धि हुई इन तथ्यों को सारणी द्वारा व्यक्त कीजिए।

यूनिट 3

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

उद्देश्य–

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो जाएँगे कि आप :

- यह बता सकें कि केन्द्रीय प्रवृत्ति क्या है
- यह मूल्यांकन कर सके कि माध्यों के परिकलन का क्या उद्देश्य है।
- एक आदर्श माध्य के गुणों की व्याख्या कर सके।
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए समान्तर माध्य तथा भारित समांतर माध्य की परिभाषा तथा सगणना कर सकें।
- समांतर माध्य के विशेष गुणों तथा गुण–दोषों की व्याख्या कर सकें।
- समांतर माध्य की सीमाओं तथा उपयोगों का वर्णन कर सकें।

प्रस्तावना–

आपने इसका विस्तारपूर्वक अध्ययन कर लिया है कि समकों को किस प्रकार वर्गीकृत किया जाता है तथा किसी प्रकार उन्हें सारणियों, आरेखों तथा लेखाचित्रों के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। यदि समकों की विशेषताओं को भलीभांति समझना हो, तो यह आवश्यक है कि समकों का ओर अधिक संक्षेपण तथा विश्लेषण किया जाए। माध्य या केन्द्रीय प्रवृत्ति, जो संपूर्ण समंकों का एक विहंगम दृश्य प्रस्तुत करती है, कि सगणना इस दिशा में पहला कदम है।

इस इकाई में आप माध्यों की संगणना का उद्देश्य तथा एक आदर्श माध्य के तात्विक अंशों का अध्ययन करेंगे, तथा माध्यों के विभिन्न मापों की पहचान करेंगे। साथ ही आप माध्यों के दो मापों, अर्थात् समांतर माध्य तथा भारित समांतर माध्य के परिकलन, गुणदोषों तथा परिसीमाओं का विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे।

केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना–

एक आवृत्ति बंटन का विश्लेषण करने के लिए उपयोग किये जाने वाले विभिन्न सांख्यिकीय मापों का सही गुण–दोष विवेचन करने के लिए यह जान लेना आवश्यक है कि अधिकतर सांख्यिकीय बंटनों के कुछ सामान्य लक्षण होते हैं। यदि हम एक चर के न्यूनतम मूल्य से उसके अधिकतम मूल्य की ओर चलें, तो प्रत्येक क्रमिक अवस्था में मदों की संख्या तब तक बढ़ती जाती है जब तक कि हम एक अधिकतम मूल्य तक नहीं पहुँचते, तत्पश्चात् जैसे–जैसे हम आगे बढ़ते हैं, वे घटती जाती है।

सांख्यिकीय समंक जो इस सामान्य प्रतिरूप का अनुसरण करते हैं, एक चर से दूसरे चर तक निम्नलिखित तीन प्रकार से भिन्न हो सकते हैं–

1. वे एक दूसरे से चरों के उन मूल्यों के संबंध में भिन्न हो सकते हैं जिनके चारों ओर अधिकतर मदों का झुंड होता है (अर्थात्–माध्य)।
2. वे उस विस्तार के विषय में भिन्न हो सकते हैं जिस तक मद व्यासृत हैं अर्थात् अपकिरण।

3. वे किसी मानक बंटन, जिसे प्रसामान्य बंटन कहा जाता है, से विचलन की सीमा के विषय में भिन्न हो सकते हैं अर्थात् विषमता तथा कुकुदता।

तद्नुसार इन तीन प्रकार की विशेषताओं का अध्ययन करने के लिए सांख्यिकीय मापों के तीन कुलक हैं। इस समय हम केवल मापों के प्रथम कुलक का ही अध्ययन करेंगे जिन्हें माध्य या केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या स्थिति के माप कहा जाता है। हम मापों के अन्य दो कुलकों (अर्थात् अपकिरण तथा विषमता के मापों) का अध्ययन आगे करेंगे।

एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुण–

जैसा कि प्रसिद्ध सांख्यिकीविदों, यूल तथा कैन्डॉल ने सुझाव दिया है, एक आदर्शन माध्य में निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिए :

1. समझने में सरल तथा संगणना करने में सुगम : माध्य निकालना सरल होना चाहिए तथा इसकी संगणना सुगम होनी चाहिए।
2. स्पष्ट रूप से परिभाषित : एक माध्य किसी गणितीय सूत्र द्वारा स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए ताकि विभिन्न व्यक्तियों द्वारा, जो उसी सगणना करने का प्रयत्न करते हैं, एक ही उत्तर निकाला जाए। इसे सगणना करने वाले व्यक्ति के व्यक्तिगत पक्षपात या पूर्वाग्रह पर आधारित नहीं होना चाहिए।
3. समंकों के समस्त मदों पर आधारित : माध्य निकालने के लिए समंक कुलक की प्रत्येक मद सम्मिलित की जानी चाहिए। कोई भी मद छोड़ी नहीं जानी चाहिए अन्यथा माध्य का मूल्य बदल सकता है।
4. न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों से अनुचित रूप से प्रभावित नहीं होना चाहिए : एक अकेला चरम मूल्य, जैसे कि एक अधिकतम मूल्य या एक न्यूनतम मूल्य माध्य को अनुचित रूप से प्रभावित कर सकता है। एक बहुत छोटी मद माध्य के मूल्य को कम कर सकती है, तथा एक बहुत बड़ी मद बड़ी सीमा तक इसके मूल्य को बढ़ा सकती है। यदि कोई माध्य एक चरम मूल्य के सम्मिलन अथवा अपवर्जन से परिवर्तित हो जाता है, तो वह उस समंक कुलक का वास्तविक प्रतिनिधि मूल्य नहीं है।
5. बीजगणितीय विवेचन संभव : एक माध्य का और अधिक बीजगणितीय विवेचन संभव होना चाहिए। इससे इसकी उपयोगिता बढ़ेगी। उदाहरणार्थ, यदि हमें तीन एक समान समंक कुलकों के माध्य दिए गए हों, तो उन तीनो समंकों कुलकों का संयुक्त कुलकों का संयुक्त माध्य निकालना संभव होना चाहिए।
6. प्रतिदर्शी स्थिरता : माध्य की एक समान प्रतिदर्शी स्थिरता होनी चाहिए। इसका अर्थ यह है कि यदि हम समष्टि से विभिन्न प्रतिदर्श लें, तो किसी भी प्रतिदर्श का माध्य लगभग वही होना चाहिए जो अन्य प्रतिदर्शों का है।

माध्यों के उद्देश्य–

आपने एक आदर्श माध्य के लक्षणों का अध्ययन कर लिया है। आइये, अब हम माध्यों की सगणना के उद्देश्यों का विवेचन करें। माध्यों के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित है–

1. एक ऐसा अकेला मूल्य प्रदान करना जो पूर्ण समंकों की विशेषताओं की व्याख्या करता है : एक माध्य समंकों के जटिल समूह का एक अकेले प्रतिनिधि मूल्य में लघुकरण कर देता है, जिससे इसकी तफसील में खोये बिना हम समंकों की मुख्य विशेषताओं को समझ सकते हैं। इस प्रकार हजारो–लाखों मूल्यों को केवल एक मूल्य द्वारा निरूपित किया जा सकता है। किन्तु यदि सारे श्रमिकों के कुल वेतन को श्रमिकों की संख्या से विभाजित करके औसत वेतन निकाल लिया जाए, तो हम जान सकते हैं कि औसत रूप में श्रमिक को कितना वेतन मिल रहा है।

2. तुलना में सहायक होना : विशाल असाधित समंकों के दो कुलकों की तुलना करना सुगम नहीं है। किंतु दो भिन्न समंक कुलकों की तुलना उनके माध्य निकालकर सुगमतापूर्वक की जा सकती है। तुलना एक समय बिन्दु पर अथवा एक समय की अवधि में की जा सकती है। उदाहरणार्थ, दो व्यावसायिक फर्मों ''अ'' तथा ''ब'' की चालू वर्ष की बिक्री की तुलना उनकी औसत बिक्री की तुलना करके कीक जा सकती है। इस इकाई की चालू वर्ष की बिक्री तथा इसी इकाई की पिछले वर्ष की बिक्री की तुलना पिछले वर्ष तथा चालू वर्ष की बिक्री का औसत निकाल कर कीक जा सकती है। किन्तु, दो समंक कुलकों के औसत की तुलना करने के लिए औसत की सगणना की समान विधि अपनाई जानी चाहिए। उदाहरणार्थ, एक इलाके के लोगों की समांतर माध्य आय की दूसरे इलाके के लोगों की मध्यका आय से तुलना करना युक्तिसंगत नहीं है। हम आगे इसी इकाई में समांतर माध्य तथा मध्यका के विषय में विस्तारपूर्वक विवेचन करेंगे।

3. सांख्यिकीय अनुमान में सहायक होना : समष्टि के अज्ञात मापों अथवा ''प्राचलों'' के विषय में अनुमान लगाने के लिए हम प्रतिदर्श से परिकलित मूल्यों पर निर्भर करते हैं। इस प्रक्रिया को सांख्यिकीय अनुमिति कहा जाता है। एक प्रतिदर्श से प्राप्त माध्य समष्टि के माध्य का प्राक्कलन करने में सहायक होता है।

4. निर्णय लेने की प्रक्रिया में सहायक होना : माध्यों की सगणना प्रबन्धकों को निर्णय लेने में सहायता प्रदान करने के लिए की जाती है। प्रबन्धक प्रायः एक संयंत्र का सामान्य उत्पादन, प्रतिनिधि बिक्री–परिमाण, कुल उत्पादिता सूचकांक मूल्य सूचकांक आदि के विषय में जानने में रूचि रखते हैं। ये सब एक माध्य के अभिधार्थ हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप –

माध्यों अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप निम्नलिखित है :

- गणितीय माध्य (Arithmatic Average)
    1. समांतर माध्य (Mean)
    2. गुणोत्तर माध्य (Geomatric Mean)
    3. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

ये सारे माप साधारण अथवा भारित हो सकते हैं। आप इस इकाई में सर्वप्रथम समांतर माध्य के बारे में विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे। गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य का विवेचन इसी इकाई में आगे किया गया है।

- स्थिति के माध्य (Situational Average)
    1. मध्यका (Median)
    2. भूयिष्ठक (Mode)

इसी इकाई में आगे मध्यका तथा भूयिष्ठक के विषय में विस्तारपूर्वक विवेचन करेंगे।

- विशिष्ट माध्य (Specific Average)
    1. चल माध्य (Moving Average)
    2. संचयी माध्य (Cumulative Average)

ये विशिष्ट माध्य सामान्यतः व्यवसाय से सम्बन्धित काल श्रेणी समंकों के विश्लेषण में प्रयोग किये जाते हैं।

(1) समान्तर माध्य (Mean)

उद्देश्य–

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- समान्तर माध्य को परिभाषित कर सकें।
- विभिन्न प्रकार के आंकड़ों के लिए समान्तर माध्य का परिकलन कर सकें।
- समान्तर माध्य के विशेष गुणों का वर्णन कर सकें।
- साधारण एवं भारित समान्तर माध्य को समझ सकें और उनका परिकलन कर सकें।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में समान्तर माध्य के उपयोगों और सीमाओं का वर्णन कर सकेंगे।

समांतर माध्य क्या है?

समांतर माध्य को समान्यतः माध्य (Mean) के नाम से जाना जाता है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है क्योंकि समंकों की अन्य संख्याएँ इसके चारों ओर एकत्र होती हैं। समांतर माध्य निकालने के लिए दिए गए समंक कुलक के समस्त प्रेक्षणों के मूल्यों के योग को उस कुलक के प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित किया जाता है। वाणिज्य, प्रबन्ध, अर्थशास्त्र, वित्त, उत्पादन आदि विषयों में उपयोग किया जाने वाला यह सर्वसामान्य माध्य हैं समांतर माध्य को साधारण समांतर माध्य भी कहा जाता है।

समांतर माध्य की संगणना–

जैसा कि आप जानते हैं, संकलन के पश्चात् समंकों को उनकी समानताओं और साम्यताओं के आधार पर विभिन्न वर्गों में व्यवस्थित करके वर्गीकृत किया जाता है। समांतर की संगणना अवर्गीकृत या असमूहित समंकों (असाधित समंकों) तथा वर्गीकृत या समूहित समंकों, दोनों के लिए की जा सकती है। किन्तु दोनों प्रकार के समंकों की संगणना की विधियाँ भिन्न होती है। आइए, अब हम अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत समंकों के लिए समांतर माध्य की संगणना की विधियों को समझें। सामान्यतः समांतर माध्यकों को, द्वारा व्यक्त किया जाता है, जिसे ग दण्ड पढ़ा जाता है।

अवर्गीकृत समंक–

विधि 1 प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) : जब समंक अवर्गीकृत हों, अर्थात् जब आवृत्ति बंटन न किया गया हो, तो समांतर माध्य की संगणना बहुत सरल होती है। इसके लिए केवल प्रेक्षणों के सारे मूल्यों को जोड़कर, उनके योगफल को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित कर दिया जाता है। इसकी व्याख्या और अभिव्यक्ति एक सूत्र के रूप में निम्न प्रकार से की जा सकती है:–

$$\bar{X} =$$

जहां,

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

$\sum x$ का अर्थ x श्रेणी के पदों का योग एवं

N का अर्थ x श्रेणी के पदों की संख्या से है।

विधि 2 अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short-cut Method): जब किए गए समंकों में प्रेक्षणों के मूल्य अत्यधिक हो अथवा भिन्नों में हों, तब इस विधि को अपनाया जा सकता है। यह विधि इस तथ्य पर आधारित है कि एक श्रेणी के व्यक्तिगत प्रेक्षणों के उनके माध्य से विचलनों का बीजगणितीय योग सदा शून्य होता है। उदाहरणार्थ 8, 14, 16, 12 और 20 का समांतर माध्य 14 है। इनमें से प्रत्येक मद का समांतर माध्य से अंतर –6,0,

+2,–2,+6 होगा, तथा इनका योग शून्य है, यह सदा सत्य है। इस विधि द्वारा समांतर माध्य की संगणना के लिए निम्न चरण उठाए जाते हैं :

1. कोई कल्पित समांतर माध्य लीजिए जिससे मदों का विचलन ज्ञात किया जाए। (A)
2. प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (x) का इस कल्पित माध्य से विचलन अर्थात् dx=x-A का परिकलन कीजिए।
3. समस्त विचलनों का योग कीजिए जिसे ∑dx (सिग्मा dx) कहा जाता है।
4. निम्नलिखित सूत्र द्वारा समांतर माध्य का परिकलन कीजिए।

$$\bar{X} = A +$$

जहाँ

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

A का अर्थ कल्पित माध्य

∑dx का अर्थ x श्रेणी के पदों से कल्पित माध्य (A) के विचलनों का योग एवं

N का अर्थ x श्रेणी के पदों की संख्या से है।

उदाहरण 1

निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

व्यापारी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विक्रय (हजार रु.)	23	8	14	31	6	28	11	27	32	46

हलः प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\bar{X} =$$

∑x अथार्त x श्रेणी के पदों का योग = 23+8+14+31+6+28+11+27+32+46 = 226 है, एवं N अर्थात श्रेणी के पदों की संख्या = 10 है।

अतः

$$\bar{X} = \frac{226}{10}$$

$$\bar{X} = 22.6 \text{ हजार रु.}$$

अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short-cut Method) :

व्यापारी Dealer	विक्रय (हजार रु.) Sales (x)	dx = x - A (A = 25)
1	23	-2
2	8	-17
3	14	-11
4	31	6
5	6	-19

6	28	3
7	11	-14
8	27	2
9	32	7
10	46	21
n=10		∑dx = -24

कल्पित माध्य $A = 25$

$\sum d = -24$

$n = 10$

$\bar{X} = A +$

$\bar{X} = 25 + \frac{-24}{10}$

$\bar{X} = 25 - 2.4$

$\bar{X} = 22.6$ हजार रु.

आपने देखा कि दोनों ही विधियों से समान्तर माध्य एक समान ही ज्ञात होता है।

वर्गीकृत समंक–

जैसा कि आपने पहले पढ़ा था, चरों को विच्छिन्न चरों तथा अविच्छिन्न चरों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को असतत बंटन **(Discrete Series)** तथा अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को सतत बंटन **(Continuous Series)** कहा जाता है। इन दो प्रकार के बंटनों के लिए समांतर माध्य का परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइए, अब इन विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणियों के लिए समान्तर माध्य

विधि 1 प्रत्यक्ष विधि (Direct Method): इस विधि के अंतर्गत समूहित समंकों का समान्तर माध्य निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है :

$$\bar{X} =$$

जहां,

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

$\sum f$x का अर्थ x श्रेणी के पदों का *f* अर्थात आवृत्तियों से गुणनफल का योग एवं

$\sum f$ का अर्थ *f* अर्थात आवृत्तियों के योग से है।

विधि 2 अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short-cut Method): जब किए गए आवृत्ति बंटन में वर्गों की संख्या बड़ी होती है, तब इस विधि को अधिमान्यता दी जाती है। इस विधि में भी लगभग वही क्रियाविधि अपनाई जाती है जैसी कि अवर्गीकृकत समंकों के लिए अपनाई जाती है। इस विधि में निम्नलिखित कदम उठाए जाते हैं :

1. एक कल्पित समांतर माध्य (A) लीजिए।

2. इस कल्पित समांतर माध्य से x चर के विचलन ज्ञात कीजिए तथा उसे dx = x - A द्वारा निदर्शित कीजिए। किसी भी मूल्य को कल्पित समांतर माााध्य के रूप में लिया जा सकता है, किन्तु दिए गए बंटन में बीचोबीच स्थित वर्ग में x चर के मूल्य को चुना जाना चाहिए।

3. विचलनों (dx) को उनसे संबंधित वर्ग आवृत्तियों (*f*) से गुणा करके तथा उनका योग करके dx प्राप्त कीजिए।

4. dx का से अनुपात अर्थात् dx/ निकालिए, इसे शोधन घटक कहा जाता है।

5. समांतर माध्य $\bar{X}$ निकालने के लिए इस शोधन घटक को कल्पित माध्य में जोड़िए। सूत्र रुप में,

$$\bar{X} = A +$$

जहाँ,

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

A का अर्थ कल्पित माध्य

$\sum f dx$ का अर्थ x श्रेणी के पदों से कल्पित माध्य (A) के विचलनों का *f* अर्थात आवृत्तियों से गुणनफल का योग एवं

$\sum f$ का अर्थ *f* अर्थात आवृत्तियों के योग से है।

उदाहरण 2

निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	60	50	30	15	12	3

हलः प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)	*f*x
1	8	8
2	12	24
3	20	60
4	40	160
5	60	300
6	50	300
7	30	210
8	15	120
9	12	108

10	3	30
	$\sum f$ = 250	$\sum fx$ = 1320

$\bar{X}$ =

$$\bar{X} = \frac{1320}{250}$$

$\bar{X}$ = 5.24

हल विधि 2 अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short-cut Method) :

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	dx = x – A (A = 5)	$f$dx
1	8	- 4	- 32
2	12	- 3	- 36
3	20	- 2	- 40
4	40	- 1	- 40
5	60	0	0
6	50	1	50
7	30	2	60
8	15	3	45
9	12	4	48
10	3	5	15
	$\sum f$ = 250		$\sum f$dx = 70

$\bar{X}$ = A +

$$\bar{X} = 5 + \frac{70}{250}$$

$\bar{X}$ = 5 + 0. 24

$\bar{X}$ = 5.24

आपने देखा कि दोनों ही विधियों से समान्तर माध्य एक समान ही ज्ञात होता है।

सतत श्रेणी के लिए समान्तर माध्य–

सतत श्रेणियों के लिए (अर्थात् जब समंकों का वर्गीकरण वर्गान्तरों के अनुसार किया गया हो), समान्तर माध्य निम्नलिखित विधियों द्वारा परिकलित किया जा सकता है।

विधि 1 प्रत्यक्ष विधि (Direct Method): जैसा कि आप जानते हैं, समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए आपको समस्त मदों के कुल मूल्यों की आवश्यकता होती है। जब समंक वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकृत किए जाते हैं, तो आपको समस्त मदों के मूल्य ज्ञात नहीं होते। आप केवल यह जानते हैं कि विभिन्न समूहों से संबंधित मद अपने–अपने वर्गान्तरों में बिखरे हुए हैं। अतः आप केवल यह जानते हैं कि विभिन्न समूहों से संबंधित मद अपने–अपने वर्गान्तरों में बिखरे हुए हैं। अतः कुल मूल्य का परिकलन करने के लिए आप यह मान लेते हैं कि एक वर्गान्तर की समान मदें उस समूह में एक समान बिखरी हुई है। इसका तात्पर्य यह है कि परिकलन के लिए आप यह मान सकते हैं, कि एक समूह से सम्बन्धित मदों के मूल्य उस समूह के मध्य बिन्दु के बराबरक है।

सतत श्रेणी की स्थिति में, वर्गान्तरों को बदलने के लिए विभिन्न वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं की संगणना की जाती है। ऐसा किये जाने के बाद सतत श्रेणी तथा असतत श्रेणी में कोई अन्तर नहीं रहा जाता। इस अवस्था के बाद समांतर माध्य की संगणना की विधि वही है जैसी कि असतत श्रेणी की स्थिति में उपयोग की जाती है। असतत श्रेणी की स्थिति में उपयोग की जाने वाली दो विधियाँ यहाँ भी उपयोग की जा सकती है। किन्तु समावेशी वर्गान्तरों तथा अपवर्जी वर्गान्तरों दोनों के लिए उपयोग की जाने वाली विधियाँ एक समान होगी। इस विधि के अन्तर्गत समान्तर माध्य निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके प्राप्त किया जाता है।

$$\bar{X} =$$

जहां,

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

$\sum f$m का अर्थ x श्रेणी के वर्गों के माध्य मूल्यों (m) का f अर्थात आवृत्तियों से गुणनफल का योग एवं

$\sum f$ का अर्थ f अर्थात आवृत्तियों के योग से है।

विधि 2 अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short-cut Method): dx प्राप्त करने की विधि में थोड़ा परिवर्तन करके वही सूत्र जिसका उपयोग असतत श्रेणी के लिए किया गया था, यहाँ भी उपयोग किया जा सकता है। यहाँ कल्पित समान्तर माध्य से मध्यमूल्यों के विचलन (अर्थात् dx=m-A) ज्ञात किये जाते है।

विधि 3 पद विचलन विधि (Step Deviation Method): यदि कल्पित समांतर माध्य से विचलनों का कोई उभयनिष्ठ गुणक हैं, तो विचलनों के आकार को इस उभयनिष्ठ गुणक (c) से भाग देकर और छोटा किया जा सकता है। इन पद विचलनों का dx या dx' अर्थात् dx=(m-A)/c द्वारा निदर्शित किया जाता है। फिर समान्तर माध्य निकाला जाता है।

टिप्पणी : यदि सारे वर्गान्तिर बराबर हैं, तो वर्गान्तर ही उभयनिष्ठ गुणक होगा।

$$\bar{X} = A + \quad \times c$$

जहाँ,

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

A का अर्थ कल्पित माध्य

$\sum f$dx का अर्थ x श्रेणी के वर्गों के माध्य मूल्यों (m) से कल्पित माध्य (A) के विचलनों का f अर्थात आवृत्तियों से गुणनफल का योग

c का अर्थ उभयनिष्ठ गुणक या वर्गान्तर एवं

$\sum f$ का अर्थ f अर्थात आवृत्तियों के योग से है।

उदाहरण 3

निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	20

हलः

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (f)	माध्य मूल्य Mid Value (m)	fm
0-20	8	10	80
20-40	12	30	360
40-60	20	50	1000
60-80	40	70	2800
80-100	20	90	1800
	$\sum f = 100$		$\sum fm = 6040$

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{6040}{100}$$

$$\bar{X} = 60.4$$

हल विधि 2 अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short-cut Method) :

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (f)	माध्य मूल्य Mid Value (m)	dx = m - A (A = 50)	$f$dx
0-20	8	10	-40	-320
20-40	12	30	-20	-240
40-60	20	50	0	0
60-80	40	70	20	800
80-100	20	90	40	800

	$\sum f$ = 100			$\sum f$dx = 1040

$$\bar{X} = A +$$

$$\bar{X} = 50 + \frac{1040}{100}$$

$$\bar{X} = 50 + 10.4$$

$$\bar{X} = 60.4$$

हल विधि 3 पद विचलन विधि (Step Deviation Method):

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (f)	माध्य मूल्य Mid Value (m)	dx = (m - A)/c (A = 50) (c = 20)	$f$dx
0-20	8	10	-2	-16
20-40	12	30	-1	-12
40-60	20	50	0	0
60-80	40	70	1	40
80-100	20	90	2	40
	$\sum f$ = 100			$\sum f$dx = 52

$$\bar{X} = A + \quad \times c$$

$$\bar{X} = 50 + \frac{52}{100} \times 20$$

$$\bar{X} = 50 + (0.52 \times 20)$$

$$\bar{X} = 50 + 10.4$$

$$\bar{X} = 60.4$$

आपने देखा कि तीनों ही विधियों से समान्तर माध्य एक समान ही ज्ञात होता है।

ध्यान देने योग्य विषेष बिन्दु

- समांतर माध्य की गणना करने की विधि में श्रेणी के आरोही अथवा अवरोही क्रम से कोई अन्तर नहीं पड़ता।
- समांतर माध्य की गणना करने की विधि में श्रेणी के समान अथवा असमान वर्गान्तर से कोई अन्तर नहीं पड़ता।
- समांतर माध्य की गणना करने की विधि में श्रेणी के अपवर्जी अथवा समावेषी स्वरुप में होने से कोई अन्तर नहीं पड़ता।

- समांतर माध्य की गणना करने की विधि में श्रेणी के 'से कम' अथवा 'से अधिक' रुप में होने पर उसे पहले साधारण वर्ग समूहों में बदलना होता है, उदाहरण के लिए:–

उदाहरण 4

निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक ('से कम')	20	40	60	80	100
विद्यार्थियों की संख्या	8	20	40	80	100

हलः

चूंकि श्रेणी 'से कम' रुप में है, अतः उसे पहले साधारण वर्गान्तरों में निम्न प्रकार बदला जायेगा–

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*)	प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*)
20 से कम	8	0-20	8
40 से कम	20	20-40	20-8=12
60 से कम	40	40-60	40-20=20
80 से कम	80	60-80	80-40=40
100 से कम	100	80-100	100-80=20
			$\sum f$ = 100

समान्तर माध्य की गणना करने की शेष विधि समान रहेगी।

भारित समान्तर माध्य

आपने विभिन्न प्रकार के समंक कुलकों के लिए समांतर माध्य की संगणना करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन कर लिया है। इन सभी विधियों में हमने यह माना है कि दिये गए समंक कुलक की सारी मदों का महत्त्व बराबर है। किन्तु प्रत्येक परिस्थितिं में ऐसा होना आवश्यक नहीं है।

व्यावहारिक परिस्थितियों में कुछ मदें दूसरी मदों की अपेक्षा अधिक महत्त्वपूर्ण होती हैं। उदाहरणार्थ किसी वर्ग का निर्वाह सूचकांक बनाते समय उनके द्वारा उपभोग की कजाने वाली वस्तुओं का महत्त्व अलग–अलग हो सकता है। ऐसी वस्तुओं के मूल्यों का साधारण समांतर माध्य उनके जीवन–यापन के प्रतिरूप का यथार्थ चित्र प्रस्तुत नहीं कर सकेगा। ऐसी परिस्थितियों में विभिन्न वस्तुओं के भार नियत किये जाते हैं, तथा एक भारित समांतर माध्य निकाला जाता है। एक कारखाने में जहाँ निर्माण लागत निकालनी हो, वहाँ एक भारित समान्तर माध्य अधिक उपयुक्त है।

भारित समान्तर माध्य की संगणना–

भारित समान्तर माध्य की संगणना के लिए x चर के विभिन्न मूल्यों (जैसे $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$) के लिए क्रमशः $w_1, w_2 \ldots\ldots, w_n$ जैसे विभिन्न भार नियत किए जाते हैं। इन मूल्यों को उनके तत्संबंधी भारों से गुणा किया जाता

है। इस प्रकार प्राप्त किए गए गुणनफलों का योग करके $\sum wx$ प्राप्त किया जाता है। तत्पश्चात् इसे भारों के योगफल ($\sum w$) से भाग दिया जाता है, तथा प्राप्त भजनफल भारित समांतर माध्य होता है। सूत्र रुप में

$$\bar{X} =$$

जहां,

$\bar{X}$ का अर्थ समान्तर माध्य,

$\sum wx$ का अर्थ x श्रेणी के पदों का w अर्थात भारों से गुणनफल का योग एवं

$\sum w$ का अर्थ w अर्थात भारों के योग से है।

भारित समांतर माध्य की संगणना में मुख्य कठिनाई भारों के चुनाव से संबंधित है। ये भार वास्तविक अथवा अनुमानित हो सकते हैं। यदि वास्तविक भार उपलब्ध हों तो उनका उपयोग किया जाना चाहिए। यदि वे उपलब्ध नहीं है तो परिस्थिति के अनुसार कुछ या यादृच्छिक भार नियत किए जा सकते है।

उदाहरण 5

तीन वस्तुओं, अ, ब और स के मूल्यों में क्रमशः 40 प्रतिश, 60 प्रतिशत तथा 90 प्रतिशत वृद्धि हुई है। वस्तु अ वस्तु स से 6 गुणा अधिक महत्त्वपूर्ण है तथा वस्तु ब वस्तु स से तीन गुणा अधिक महत्त्वपूर्ण है। इन तीनों वस्तुओं के मूल्यों में कितनी औसत वृद्धि हुई है?

हलः

साधारण माध्य (Simple Average or Mean)

$$\bar{X} =$$

$\sum x$ अथार्त x श्रेणी के पदों का योग = 40 + 60 + 90 = 190 है, एवं N अर्थात श्रेणी के पदों की संख्या = 3 है। अतः

$$\bar{X} = \frac{190}{3}$$

$$\bar{X} = 66.33 \text{ प्रतिषत लगभग}$$

हलः

भारित माध्य (Weighted Average or Weighted Mean):

प्रतिशत वृद्धि Percent Increase (x)	भार Weight (w)	wx
40	6	240
60	3	180
90	1	90
	$\sum w = 10$	$\sum wx = 510$

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{510}{10}$$

$$\bar{X} = 51\%$$

आपने देखा कि दोनों ही माध्य एक समान नही ज्ञात होते है।

साधारण समान्तर माध्य से तुलना–

भारित समान्तर माध्य साधारण समांतर माध्य से भिन्न है। क्योंकि इसमें हम भारों का प्रयोग करते हैं। भारित माध्य और साधारण माध्य के बीच परस्पर संबंध निम्न प्रकार से हैं।

1. यदि सारे मदों को बराबर का महत्त्व दिया जाए तो भारित माध्य साधारण माध्य के बराबर होगा।
2. यदि बड़ी मदों को बड़े भार तथा छोटी मदों को छोटे भार दिए जाएँ तो भारित माध्य साधारण माध्य से अधिक होगा।
3. यदि बड़ी मदों को छोटे भार तथा छोटी मदों को बड़े भार दिए जाएँ तो भारित माध्य साधारण माध्य से कम होगा।

समान्तर माध्य के गुण तथा सीमाएँ–

समान्तर माध्य के गुण और परिसीमाएँ निम्नलिखित है –

गुण –

1. इसे समझना सरल है तथा इसकी संगणना करना सुगम हे। यह सबसे व्यापक रूप से प्रयोग किया जाने वाला संक्षिप्त माप है।
2. यह स्पष्ट रूप से परिभाषित होता है।
3. यह कुल समंक कुलक का एक अकेली प्रतिनिधि संख्या के रूप में कार्य करता है।
4. यह समंकों की समस्त मदों पर आधारित होता है। यह श्रेणी में अपनी स्थिति पर निर्भर नहीं करता।
5. इसका और अधिक गणितीय विवेचन किया जा सकता है।
6. यह और अधिक सांख्यिकीय विश्लेषण में उपयोगी होता है। इसका उपयोग अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे मानक विचलन विचरण गुणांक, वैषग्य गुणांक आदि, की संगणना में किया जाता है। (आप इनके विषय में खण्ड 4 में पढ़ेंगे)
7. इसे गुरूत्व के केन्द्र–संतुलन का एक बिन्दु भी माना जाता है।
8. विभिन्न प्रतिचयन विधियों के लिए, प्रतिदर्श माध्य समष्टि के माध्य का एक पक्षपातहीन अनुमान है।

सीमाएँ–

1. यह चरम मूल्यों से अत्यधिक प्रभावित होता है। समंकों में बहुत छोटे या बहुत बड़े मूल्य समान्तर माध्य के मूल्य को अत्यधिक प्रभावित करते हैं। अतः एक ऐसे बंटन के लिए, जिसमें छोटे या बड़े मूल्यों पर केन्द्रीकरण हो, समान्तर माध्य प्रतिनिध संख्या बताने के लिए एक उपयुक्त माध्य नहीं होगा।
2. खुले सिरे वाले बंटन के लिए, समान्तर माध्य की संगणना परिशुद्धता के साथ नहीं की जा सकती। उदाहरणार्थ, एक आय के बंटन के लिए, जिसका प्रारंभ ''500 से कम'' वर्ग से तथा अन्त ''5000 से ऊपर'' के वर्ग से होता है, दोनों चरमों के मूल्यों के विषय में कल्पना किये बिना समांतर माध्य की संगणना नहीं की जा सकती। परिणामस्वरूप विभ्रम उत्पन्न हो सकता है।

3. समान्तर माध्य सुन्दरता, ईमानदारी, बुद्धि आदि जैसे साक्षात् विषयों के अध्ययन के लिए उपयोगी नहीं है।

4. एक पर्याप्त प्रसामान्य (छतरी की आकृति वाले) बंटन के लिए समान्तर माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक अच्छा माप है। किन्तु U आकृति वाले बंटन के लिए (जिसमें प्रारंभ में अधिक, मध्य में कम तथा पुनः अन्त में अधिक आवृत्ति होती है), यह स्थिति का एक ऐसा बिन्दु होने में मुश्किल से सफल हो पाता है जिसके चारों ओर अन्य अलग–अलग मूल्य केन्द्रित होते हैं।

5. समान्तर माध्य का अपना निजी अस्तित्व नहीं होता। उदाहरणार्थ इस कथन का कि भारतीय परिवार में बच्चों की औसत संख्या 4.8 है, यह अर्थ नहीं है कि एक भी परिवार में बच्चों की संख्या 4.8 है। न ही कभी कोई बतख दो निशानों की औसत से जिनमें से एक उससे एक गज आगे तथा दूसरा उसके एक गज पीछे लगा है, मारी गई है।

6. असजातीय समंकों के लिए, समान्तर माध्य भ्रामक परिणाम दे सकता है। उदाहरणार्थ, पिछले पाँच वर्षों में दो व्यावसायिक इकाईयों अ और ब की बिक्री (लाख रूपयों में) निम्न प्रकार से हुई –

अ.	30	25	20	15	10
ब.	10	15	20	25	30

यहाँ स्पष्ट है कि दोनों इकाईयों की औसत बिक्री बिल्कुल समान है। परन्तु इकाई 'ब' उन्नति कर रही हैं जबकि इकाई 'अ' में गिरावट आ रही है।

सारांश–

समंकों की मुख्य विशेषताएँ एक अकेली संख्या द्वारा जिसे ''औसत'' या ''माध्य'' कहा जाता है, निरूपित की जाती है। यह स्थिति का एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके चारों ओर व्यक्तिगत मूल्य एकत्र होते हैं। एक आदर्श माध्य में कुछ गुण होने चाहिए, जैसे इसके परिकलन की सुगमता, इसकी परिभाषा की स्पष्टता, इसका समस्त मदों पर आधारित होना, इसका चरम मूल्यों द्वारा अप्रभावित रहना, और इसका अधिक बीजगणितीय विवेचन के योग्य होना, तथा इसमें प्रतिदर्शी स्थिरता होना।

एक माध्य समस्त समंकों का एक विहंगम दृश्य प्रस्तुत करता है, तुलना में सहायक होता है तथा सांख्यिकीय अनुमान में उपयोगी होता है। अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत समंकों का साधारण माध्य ज्ञात करने के लिए आसान सूत्र हैं। जब समंक कुलक में मूल्य असमान महत्त्व के होते हैं, तब भारित समांतर माध्य एक सच्चा प्रतिनिधि माध्य होगा। भारित माध्य दो वस्तुओं का संक्षेपण करता है : (1) मदों का तथा (2) किस प्रकार भार मदों को प्रभावित करते हैं। अतः भारण–प्रतिरूप के अनुसार साधारण माध्य भारित माध्य के बराबर, उससे अधिक या उससे कम हो सकता है।

समान्तर माध्य के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण होते हैं : (अ) समांतर माध्य से विचलनों का योग सदा शून्य होता है, (ब) समांतर माध्य से मदों के विचलनों का वर्ग न्यूनतम होता है। (स) यदि समान्तर माध्य और मदों की संख्या ज्ञात हो, तो हम कुल मूल्य ($\sum x$) का अनुमान लगा सकते हैं। (द) यदि एक समंक कुलक के प्रत्येक मद में एक स्थिरांक ''C'' जोड़ा जाए या घटाया जाए तो समांतर माध्य भी ''C'' मात्रा से बढ़ या घट जाएगा। इसी प्रकार यदि प्रत्येक मद को किसी स्थिरांक ''K'' से गुणा किया जाए, तो समांतर माध्य भी ''K'' से गुणा हो जाता है। (य) दो या अधिक समूहों का संयुक्त समांतर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

समांतर माध्य एक अति उपयोगी माप है। यह संतुलन का एक बिन्दु है तथा यह आगे विश्लेषण का आधार बनता है। इसकी कुछ सीमाएँ भी हैं। यह चरम मदों से प्रभावित होता है। एक खुले सिरे वाले बंटन के लिए इसका अनुमान कुछ मान्यताओं के साथ ही किया जा सकता है। असजातीय समंकों के लिए यह भ्रामक परिणाम देता है।

अभ्यास प्रश्न 1 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक
1041	87	1046	47	1051	69
1042	38	1047	15	1052	55
1043	52	1048	28	1053	24
1044	75	1049	80	1054	36
1045	63	1050	71	1055	38

अभ्यास प्रश्न 2 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि
जनवरी	10000	मई	.8000	सितंबर	4000
फरवरी	18000	जून	100	अक्तूबर	8000
मार्च	0	जुलाई	400	नवंबर	12000
अप्रेल	.2500	अगस्त	1000	दिसंबर	20000

अभ्यास प्रश्न 3 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	10	172
5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12
9	176	योग	800

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल	पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल

6	5	11	4
8	7	15	2
9	8	16	3
10	6	20	0
		25	1

अभ्यास प्रष्न 5 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0.10	10
20.30	20
20.30	30
30.40	15
40.50	12
50.60	8
60.70	5
ज्वजंस	100

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0.9	2	40.49	12	80.89	2
10.19	3	50.59	8	90.99	1
20.29	6	60.69	5	योग	50
30.39	8	70.79	3		

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75.80	5	55.60	7	35.40	7

70.75	7	50.55	12	30.35	7
65.70	15	45.50	18	25.30	8
60.65	18	40.45	5	20.25	4

अभ्यास प्रश्न 8 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

तापमान ⁰	दिनों की संख्या
.40 जव .30	10
.30 जव .20	28
.20 जव .10	30
.10 जव 0	42
0 जव 10	65
10 जव 20	180
20 जव 30	10

अभ्यास प्रश्न 9 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

प्राप्तांकों का प्रतिशत	विद्यार्थियों की संख्या
11.25	6
26.40	20
41.55	44
56.70	26
71.85	3
86.100	1

अभ्यास प्रश्न 10 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः–

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या

0.5	2	10.13	10	16.19	4
5.7	3	13.15	5	19.20	3
7.9	4	15.16	3	20.25	5
9.10	2				

अभ्यास प्रश्न 11 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0.5	2	45.65	22
5.15	8	65.85	18
15.25	12	85.150	9
25.45	25	150.300	4

अभ्यास प्रश्न 12 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

केन्द्रीय आकार	आवृत्ति	केन्द्रीय आकार	आवृत्ति
14	1	22	37
16	7	24	29
18	10	26	9
20	44	28	3

अभ्यास प्रश्न 13 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 14 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
80: से कम	100	40: से कम	32
70: से कम	90	30: से कम	20
60: से कम	80	20: से कम	13
50: से कम	60	10: से कम	5

अभ्यास प्रष्न 15 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

उपज सइेण में	खेतों की संख्या	120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

अभ्यास प्रष्न 16 निम्न समंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 से अधिक	250	50 से अधिक	155
10 से अधिक	225	60 से अधिक	125
20 से अधिक	210	70 से अधिक	60
30 से अधिक	190	80 से अधिक	10
40 से अधिक	175	90 से अधिक	0

अभ्यास प्रष्न 17 निम्न समंकों से साधरण एवं भारित समान्तर माध्य की गणना कीजियेः— किसी विश्वविद्यालय में विज्ञान संकाय का परीक्षा परिणाम 80 प्रतिषत, वाणिज्य संकाय का परीक्षा परिणाम 70 प्रतिषत एवं कला संकाय का परीक्षा परिणाम 51 प्रतिषत रहा। विद्यार्थियों की संख्या विज्ञान संकाय में 400, वाणिज्य संकाय में 600 तथा कला संकाय में 1000 थी।

(2) माध्यिका (Median)

उद्देश्य—

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- माध्यिका को परिभाषित कर सकें।
- विभिन्न प्रकार के आंकड़ों के लिए, माध्यिका का परिकलन कर सकें।

- माध्यिका के विशेष गुणों का वर्णन कर सकें।
- विभिन्न प्रकार की श्रेणियों में माध्यिका का पता लगा सकें और उसका परिकलन कर सकें।
- माध्यिका का रेखाचित्रों द्वारा निर्धारण कर सकें।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में, माध्यिका के उपयोगों और सीमाओं का वर्णन कर सकेंगे।

प्रस्तावना–

आपने पढ़ा है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के कई माप हैं। जैसा कि आप जानते हैं, समांतर माध्य पर, चरम मदों का बहुत अधिक प्रभाव होता है। कई बार, हम माध्य का ऐसा माप चाह सकते हैं जो चरम मदों द्वारा प्रभावित न हो। माध्यिका एक ऐसा ही माप है। कुछ अन्य माप भी है, जिन्हें विभाजन मान कहते हैं, जो माध्य माप नही हैं, परंतु संकल्पना की दृष्टि से जो माध्यिका के सदृश हैं। इस इकाई में, आप माध्यिका और अन्य विभाजन मानों के अर्थ, परिकलन, विशेष गुणों, उपयोगों और सीमाओं के बारे में पढ़ेंगे।

माध्यिका किसे कहते हैं ?

माध्यिका भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है। समांतर माध्य के विपरीत, माध्यिका, आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित श्रेणी में एक नियत स्थिति के प्रेक्षण पर आधारित होती है। इसलिए, इसे एक स्थैतिक माध्य कहते हैं। सभी प्रेक्षणों के परिणामों से इसका कोई सम्बन्ध नहीं होता, जैसा कि समांतर माध्य की स्थिति में होता है। सरल शब्दों में, माध्यिका चर से सर्वाधिक मध्यगत मान को निर्दिष्ट करती हैं, जब उन्हें (प्रेक्षण मानों को) परिमाण के क्रम में रखा जाए। श्रेणी में माध्यिका की स्थिति ऐसी होती है कि इसके प्रत्येक मद की संख्या समान होती है। एक दी गई श्रेणी की माध्यिका चर का वह मान होती है, जो श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित कर दें। यह श्रेणी का सर्वाधिक केन्द्रीय बिन्दु होता है, जहाँ आधे मद, इस मान के ऊपर होते हैं और शेष आधे, इस मान के नीचे होते हैं। आवृत्ति वक्र की स्थिति में, माध्यिका चर का वह मान होती है जो क्षेत्रफल को दो समान भागों में विभाजित कर दें। माध्यिका को प्रायः प्रतीक M_d द्वारा सूचित करते हैं।

माध्यिका का परिकलन–

अवर्गीकृत आंकड़ों और वर्गीकृत आंकड़ों दोनों ही के लिए, माध्यिका का परिकलन किया जा सकता है। परंतु, विधियाँ भिन्न हैं। आइये, वर्गीकृत और अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, माध्यिका के परिकलन की विधियों का पृथक्–पृथक् अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक –

आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात् माध्यिका को (N+1)/2 वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहाँ N मदों की कुल संख्या को सूचित करता है।

1. जब N विषम हो : जब प्रेक्षणों की संख्या एक विषम संख्या हो तो माध्यिका (M_d) का सूत्र है :

$$M_d = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

अर्थात् (N+1)/2 वें मद का मान, जहाँ N का अर्थ प्रेक्षणों की संख्या से है।

उदाहरण 6

श्रेणी 6,8,7,9,10,4,3,11 तथा 4 की माध्यिका ज्ञात करने के लिये पहले इसे आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करेंगे। आरोही क्रम में रखी गई श्रेणी है : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और अवरोही क्रम में रखी गई यही श्रेणी है : 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 प्रेक्षणों की संख्या 9 है जो कि एक विषम संख्या है। अतः (N+1)/2 =

(9+1)/2 = 10/2 = 5वें मद का मान ही, माध्यिका होगी। पाँचवें मद का मान 7 हैं अतः माध्यिका (M_d) 7 है। इससे अभिप्राय है कि चाहे श्रेणी को आरोही क्रम में रखा जाए या अवरोही क्रम में, माध्यिका समान ही रहती है।

2. जब N सम हो : जब प्रेक्षणों की संख्या (N) एक सम संख्या हो तो (N+1)/2 का मान एक भिन्न से सम्बद्ध होगा। ऐसी स्थिति में, दो मध्यगत मदों के मानों के समांतर माध्य को ही, माध्यिका मानते हैं।

उदाहरण 7

श्रेणी : 6, 11, 3, 16, 20, 32, 36 पर विचार कीजिए। इस श्रेणी में, प्रेक्षणों की संख्या 8 है, जो कि एक सम संख्या है। (N+1)/2 = (8+1)/2 = 9/2 = 4.5 यह मान, भिन्न 0.5 से सम्बद्ध है। ध्यान दीजिए कि ऐसा कोई पद नहीं हैं जिसकी क्रम संख्या 4.5 हो। अतः आपको, चौथे और पाँचवें मदों के मानों के समांतर माध्य को ही माध्यिका मानना होगा। यह स्थिति उन सभी श्रेणियों में प्रस्तुत होगी जहाँ N एक सम संख्या हो। अब हम, दी गई श्रेणी को, आरोही क्रम में, निम्नानुसार रखते हैं :

3, 6, 11, 16, 20, 32, 36, 41

क्रम में रखी गई इस श्रेणी में, चौथे और पाँचवें मदों के मानों का समांतर माध्य ही माध्यिका होगा। इस श्रेणी में, चौथे और पाँचवें मदों के मान क्रमशः 16 और 20 है। अतः माध्यिका (M_d) = 18 अर्थात् (16 + 20)/2 है।

N के एक सम संख्या होने की स्थिति में भी, हम (N+1)/2 वें मद के मान को, माध्यिका ले सकते हैं, परंतु इस प्रयोजन के लिए, हमें (N+1)/2 के मान में, भिन्न 0.5 की समुचित रूप से व्याख्या करनी होगी। ऊपर दिए गए उदाहरण में, 4.5 वें मद के मान को ज्ञात करना अभीष्ट है। लोक सम्पति से, हम 4.5 वें मद के मान को ज्ञात करने के लिए चौथे मद के मान में, चौथे और पाँचवें मदों के मानों के अंतर का आधा जोड़ देते है। दी गई श्रेणी को आरोही क्रम में रखने पर, चौथे मद का मान 16 है और पाँचवें मद का मान 20 है। अतः माध्यिका (M_d) 18 अर्थात् 16 + 1/2 (20-16) है। यह मान वही है जो पहले प्राप्त हुआ था। अतः अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, चाहे N एक विषम संख्या हो या सम संख्या हो, (N+1)/2 वें मद के मान को ही माध्यिका परिभाषित कर सकते हैं।

वर्गीकृत समंक —

जैसा कि आपने पहले पढ़ा था, चरों को विच्छिन्न चरों तथा अविच्छिन्न चरों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को असतत बंटन (Discrete Series) तथा अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को सतत बंटन (Continuous Series) कहा जाता है। इन दो प्रकार के बंटनों के लिए माध्यिका का परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइए, अब इन विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणियों के लिए माध्यिका

आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात् आवृत्तियों को संचयी (Cumulative) किया जाता है। माध्यिका को (N+1)/2 वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहाँ N मदों की कुल संख्या अर्थात् आवृत्तियों के योग ($\sum f$) को सूचित करता है। सूत्र रुप में,

$$M_d = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

अर्थात् (N+1)/2 वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। जिस संचयी आवृत्ति में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को माध्यिका माना जायेगा।

उदाहरण 8

निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	60	50	30	15	12	3

हलः

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*)	संचयी आवृत्ति c*f*
1	8	8
2	12	20
3	20	40
4	40	80
5	60	140
6	50	190
7	30	220
8	15	235
9	12	247
10	3	250
	$N = \sum f = 250$	

$$M_d = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$M_d = \text{Size of } \left(\frac{250+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$M_d = \text{Size of } \left(\frac{251}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$M_d = \text{Size of } (125.5)^{th} \text{ item}$$

अर्थात् 125.5 वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 140 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 5 को माध्यिका माना जायेगा। ($M_d = 5$)

सतत श्रेणियों के लिए माध्यिका

सतत श्रेणी के आवृत्ति बंटन की स्थिति में, विभिन्न मदों के यथार्थ मान ज्ञात नहीं होते। अतः किसी मद विशेष का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता। हम केवल इतना कर सकते हैं कि चर का वह मान ज्ञात कर लें, जिसके ऊपर या नीचे आधे मद हों, अतः माध्यिका वर्ग का निर्धारण करने के लिए आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात् आवृत्तियों को संचयी (Cumulative) किया जाता है। माध्यिका वर्ग को N/2 वें

मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहाँ N मदों की कुल संख्या अर्थात् आवृत्तियों के योग ($\sum f$) को सूचित करता है। सूत्र रुप में,

$$m = \text{Size of} \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{item}$$

अर्थात् N/2 वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। जिस संचयी आवृत्ति में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को माध्यिका वर्ग माना जायेगा। माध्यिका वर्ग निर्धारित करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा, निम्न तीन विधियों में से किसी एक को अपना कर, निर्धारित किया जा सकता है।

विधि 1 इस विधि में अंतर्वेशन के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:—

$$M_d = L + \frac{i}{f} \times (m - c)$$

जहाँ,

M_d का अर्थ माध्यिका,

L का अर्थ माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

i का अर्थ माध्यिका वर्ग का वर्गान्तर

f का अर्थ माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

m का अर्थ Size of $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ item एवं

c का अर्थ माध्यिका वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति से है।

पहली विधि में प्रयुक्त सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि संचयी आवृत्तियों का परिकलन, निम्नतर मानों की ओर से किया गया है। यदि, संचयी आवृत्तियों का परिकलन, उच्चतर मानों की ओर से किया जाए, तो उपरोक्त सूत्र में तनिक संशोधन कर, निम्न सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

विधि 2 इस विधि में अंतर्वेशन के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:—

$$M_d = U - \frac{i}{f} \times (m - c)$$

जहाँ,

M_d का अर्थ माध्यिका,

U का अर्थ माध्यिका वर्ग की ऊपरी सीमा

i का अर्थ माध्यिका वर्ग का वर्गान्तर

f का अर्थ माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

m का अर्थ Size of $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ item एवं

c का अर्थ माध्यिका वर्ग से तुरन्त पूर्व की उच्चतर संचयी आवृत्ति है।

विधि 3 इस विधि में अंतर्वेशन के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:—

$$M_d = L + \frac{\left(\frac{N}{2}\right) - c}{f} \times (U - L) \quad \text{अथवा} \quad M_d = U - \frac{\left(\frac{N}{2}\right) - c}{f} \times (U - L)$$

जहाँ,

M_d का अर्थ माध्यिका,

L का अर्थ माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

U का अर्थ माध्यिका वर्ग की ऊपरी सीमा

f का अर्थ माध्यिका वर्ग की आवृत्ति एवं

c का अर्थ माध्यिका वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति से है।

उदाहरण 9

निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजिये:—

प्राप्तांक	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	20

हलः

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)	संचयी आवृत्ति *cf*
0-20	8	8
20-40	12	20
40-60	25	45
60-80	40	85
80-100	15	100
	$N = \sum f = 100$	

$$m = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } \left(\frac{100}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } 50^{th} \text{ item}$$

अर्थात् 50 वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 85 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 60—80 को माध्यिका का वर्ग माना जायेगा। अब इस माध्यिका वर्ग का निर्धारण करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा, निम्न तीन विधियों में से किसी एक को अपना कर, निर्धारित किया जा सकता है।

विधि 1

$$M_d = L + \frac{i}{f} \times (m - c)$$

जहाँ,

L का अर्थ माध्यिका वर्ग की निचली सीमा = 60

i का अर्थ माध्यिका वर्ग का वर्गान्तर = 20

f का अर्थ माध्यिका वर्ग की आवृत्ति = 40

m का अर्थ Size of $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ item = 50 एवं

c का अर्थ माध्यिका वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति = 45 से है। अतः

$$M_d = 60 + \frac{20}{40} \times (50 - 45)$$

$$M_d = 60 + \frac{20}{40} \times 5$$

$$M_d = 60 + \frac{1}{2} \times 5$$

$$M_d = 60 + 2.5 = 62.5$$

पहली विधि में संचयी आवृत्तियों का परिकलन, निम्नतर मानों की ओर से किया गया है। यदि, संचयी आवृत्तियों का परिकलन, उच्चतर मानों की ओर से किया जाए, तो

विधि 2

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति cf
0-20	8	100
20-40	12	92
40-60	25	80
60-80	40	55
80-100	15	15
	$N = \sum f = 100$	

$$m = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } \left(\frac{100}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } 50^{th} \text{ item}$$

अर्थात् 50 वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 55 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 60–80 को माध्यिका का वर्ग माना जायेगा।

$$M_d = U - \frac{i}{f} \times (m - c)$$

जहाँ,

U का अर्थ माध्यिका वर्ग की ऊपरी सीमा = 80

i का अर्थ माध्यिका वर्ग का वर्गान्तर = 20

f का अर्थ माध्यिका वर्ग की आवृत्ति = 40

m का अर्थ Size of $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ item = 50 एवं

c का अर्थ माध्यिका वर्ग से तुरन्त पूर्व की उच्चतर संचयी आवृत्ति = 15 से है।

$$M_d = 80 - \frac{20}{40} \times (50 - 15)$$

$$M_d = 80 - \frac{20}{40} \times 35$$

$$M_d = 80 - \frac{1}{2} \times 35$$

$$M_d = 80 - 17.5$$

$$M_d = 62.5$$

विधि 3 इस विधि में अंतर्वेशन के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:–

$$M_d = L + \frac{\left(\frac{N}{2}\right) - c}{f} \times (U - L) \text{ अथवा } M_d = U - \frac{c - \left(\frac{N}{2}\right)}{f} \times (U - L)$$

जहाँ, L का अर्थ माध्यिका वर्ग की निचली सीमा = 60

U का अर्थ माध्यिका वर्ग की ऊपरी सीमा = 80 एवं

c का अर्थ माध्यिका वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति 45 एवं 15 से है।

$$M_d = 60 + \frac{\left(\frac{100}{2}\right) - 45}{40} \times (80 - 60) \text{ अथवा } M_d = 80 - \frac{\left(\frac{100}{2}\right) - 15}{40} \times (80 - 60)$$

$$M_d = 60 + \frac{(50) - 45}{40} \times (20) \text{ अथवा } M_d = 80 - \frac{(50) - 15}{40} \times (20)$$

$$M_d = 60 + \frac{5}{40} \times (20) \text{ अथवा } M_d = 80 - \frac{35}{40} \times (20)$$

$$M_d = 60 + \frac{5}{2} \text{ अथवा } M_d = 80 - \frac{35}{2}$$

$$M_d = 60 + 2.5 \text{ अथवा } M_d = 80 - 17.5$$

$$M_d = 62.5 \text{ अथवा } M_d = 62.5$$

आपने देखा कि तीनों ही विधियों से माध्यिका एक समान ही ज्ञात होती है।

ध्यान देने योग्य विषेष बिन्दु

- माध्यिका की गणना करने की विधि में श्रेणी के आरोही अथवा अवरोही क्रम से कोई अन्तर नहीं पड़ता, परन्तु असतत श्रेणी में संचयी आवृत्ति ज्ञात करने एवं तद्नुसार अंतर्वेशन के लिये सूत्र का प्रयोग करने में यथेष्ट सावधानी आवष्यक है।
- माध्यिका की गणना करने की विधि में श्रेणी के समान अथवा असमान वर्गान्तर से कोई अन्तर नहीं पड़ता परन्तु असतत श्रेणी में अंतर्वेशन के लिये सूत्र में वर्गान्तर माध्यिका वर्ग का ही प्रयोग किया जायेगा।

- माध्यिका की गणना करने की विधि में श्रेणी के अपवर्जी स्वरुप में होना आवष्यक है, समावेषी श्रेणी में 0.5 का समायोजन करके उसे अपवर्जी में परिवर्तित करना पड़ेगा। उदाहरण के लिए:–

उदाहरण 10

निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजिये:–

प्राप्तांक	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	20

हलः चूंकि श्रेणी समावेषी रुप में है, अतः उसमें पहले 0.5 का समायोजन करके अपवर्जी में निम्न प्रकार बदला जायेगा–

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)
1-20	8	0.5-20.5	8
21-40	12	20.5-40.5	12
41-60	20	40.5-60.5	20
61-80	40	60.5-80.5	40
81-100	20	80.5-100.5	20
	$\sum f$ = 100		$\sum f$ = 100

माध्यिका की गणना करने की शेष विधि पूर्ववत् रहेगी।

- माध्यिका की गणना करने की विधि में श्रेणी के 'से कम' अथवा 'से अधिक' रुप में होने पर उसे पहले साधारण वर्ग समूहों में बदलना होता है।

माध्यिका के विशेष गुण–

1. माध्यिका का एक महत्त्वपूर्ण गुण यह है कि विभिन्न मानों के माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का योगफल, न्यूनतम होता है, अर्थात् $\sum|x-M_d|$ न्यूनतम होता है। इस गुणधर्म के कारण, बहुत सी व्यावहारिक परिस्थितियों में, माध्यिका का प्रयोग ही उचित होता है। उदाहरण के लिए मदों 5, 7, 8, 9, 21 पर विचार कीजिए। यहाँ, माध्यिका N+1/2 वें मद का मान, अर्थात् माध्यिका 8 है। आइये, निरपेक्ष विचलनों का परिकलन करें, (1) माध्यिका से, (2) किसी अन्य मान जैसे 7 से, और (3) समांतर माध्य, (अर्थात् 5 + 7 + 8 + 9 + 21) ⁄5 = 10 से

x	$|x-M_d|$ (M_d = 8)	$|x-A|$ (A = 7)	$|x-\bar{X}|$ ($\bar{X}$ = 10)
5	3	2	5

7	1	0	3
8	0	1	2
9	1	2	1
21	13	14	11
	$\sum \|x-M_d\| = 18$	$\sum \|x-A\| = 19$	$\sum \|x-\bar{X}\| = 22$

यदि आप ऊपर की सारणी का, ध्यान से अध्ययन करें तो आप देखेंगे कि न्यूनतम योग 18 है, जो कि माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का जोड़ है।

2. यह सीमांत मदों (अर्थात् चरम मानों) से प्रभवित नहीं होता। परंतु निस्संदेह ही मदों की संख्या, इसे प्रभावित करती है।

3. विवृत मुखी (खुले सिरे वाले) बंटन के लिए तो, माध्यिका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है। उदाहरण के लिए, क्योंकि आय बंटन एक विवृत मुखी बंटन होता हैं, माध्यिका आय बंटन का श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान होगा।

4. गुणात्मक सूचनाओं के लिए, सम्भवतः माध्यिका ही, केन्द्रीय प्रवृत्ति का एकमात्र उपयुक्त माप है। उदाहरण के लिए, हम एक प्रत्यर्थी से कह सकते हैं कि वह एक निगम प्रतिमा के अपने मूल्यांकन को गतिशील, प्रतिष्ठित, (व्यवसाय की दृष्टि से) सहयोग देने वाला, सफल और प्रत्याहरित के रूप में महत्त्व के आधार पर क्रमबद्ध करें। मान लीजिए वह उन्हें, ठीक उसी प्रकार क्रमबद्ध करता है, जैसा कि ऊपर दिया गया है, तो, इन पाँच क्रमबद्ध मानों की माध्यिका होगी, (व्यवसाय की दृष्टि से) सहयोग देने वाला।

5. माध्यिका को, एक रेखाचित्र द्वारा भी स्थापित (या निर्धारित) किया जा सकता है।

6. माध्यिका का परिकलन करना सरल है, और इसे स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है। कुछ स्थितियों में तो, इसे निरीक्षण मात्र से प्राप्त कर सकते हैं।

माध्यिका के गुण और परिसीमाएँ–

आपने माध्यिका के अर्थ, उसके परिकलन की विधियों और गुणधर्मो का अध्ययन किया हैं। आइये, अब माध्यिका के गुणों (योग्यताओं और उसकी परिसीमाओं) की विवेचना करें।

गुण–

1. एक विवृतमुखी बंटन, जैसे आय बंटन के लिए, माध्यिका एक श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान है।

2. क्योंकि माध्यिका चरम मानों द्वारा विकृत नहीं होता, जबकि माध्य उनसे विकृत होता है, इसलिए कुछ स्थितियों में, माध्य की अपेक्षा, माध्यिका अधिमान्य होता है।

3. गुणात्मक घटनाओं का अध्ययन करने के लिए, माध्यिका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है।

4. क्योंकि माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का योगफल न्यूनतम होता है, इसलिए उन स्थितियों में जहाँ भौगोलिक दूरी को न्यूनतम करना हो, माध्यिका अधिमान्य हैं उदाहरण के लिए, मान लीजिए, कि भारत के पाँच विभिन्न नगरों से, पाँच उच्च अधिकारियों का एक सम्मेलन है। वग नगर, जो माध्यिका दूरी पर स्थित हो, सम्मेलन के लिए अधिक उपयुक्त स्थान होगा।

5. जब केवल एक या दो टायर खरीदने हों, तो यह निश्चय करते समय कि कौन सी छाप का टायर खरीदा जाए, अधिकतम माध्यिका दूरी चलने वाली छाप ही अधिमान्य होगी। इसी प्रकार एक कपड़े धोने की मशीन खरीदते समय, एक अधिकतर माध्य जीवन वाली मशीन की अपेक्षा, अधिकतर माध्यिका जीवन वाली मशीन अधिमान्य होगी।

परिसीमाएँ–

1. माध्यिका उच्च बीजगणितीय प्रतिपादन के अक्षम्य हैं इसका अभिप्राय यह है कि दो या दो से अधिक समूहों की संयुक्त माध्यिका ज्ञात नहीं कर सकते जब तक कि उन समूहों के सभी मदों का मान ज्ञात न हों।
2. कभी–कभी इसे एक अचेतन माप कहा जाता है, क्योंकि यह श्रेणी के सभी मदों पर आधारित नहीं होती।
3. समांतर माध्य की अपेक्षा, यह प्रतिचयन उच्चावचनों से, अधिक प्रभावित होती है।
4. माध्यिका का परिकलन सूत्र, एक प्रकारसे, अतर्वेशन की एक विधि है, जो इस मान्यता पर आधारित है कि माध्यिका वर्ग के सभी मद, उस वर्ग अंतराल में, एक समान बंटे हुए हैं, परन्तु यह मान्यता सत्य नहीं है।
5. माध्यिका द्वारा मन पर डाला गया प्रभाव, मायावी और धोखा देने वाला हो सकता है, क्योंकि इसका मान, केवल मात्र माध्य–गत प्रेक्षणों) द्वारा निर्धारित होता है। उदाहरण के लिए, प्रत्येक लाटरी में, एक टिकट द्वारा जीता गया माध्यिका इनाम सदैव शून्य होता है जबकि सारे टिकटों को ध्यान में रखा जाए। (50प्रतिशत) से अधिक टिकटों द्वारा कोई भी इनाम न जीता जाएगा) इनाम का यह माध्यिका मान, लाटरी द्वारा प्रस्तुत इनामों के विश्लेषण में कोई सहायता नहीं करता, क्योंकि प्रस्तुत कुल इनामों में से पहला इनाम ही रूचि का विषय हो सकता है।

अभ्यास प्रष्न 1 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

87,38,52,75,63,47,15,28,80,71,69,55,24,36,38

अभ्यास प्रष्न 2 निम्न लाभ/हानि के समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

जनवरी	10000	अप्रेल	-2500	जुलाई	400	अक्तूबर	8000
फरवरी	18000	मई	-8000	अगस्त	1000	नवंबर	12000
मार्च	0	जून	100	सितंबर	4000	दिसंबर	20000

अभ्यास प्रष्न 3 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	10	172
5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12

9	176	योग	800

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल	पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल
6	5	11	4
8	7	15	2
9	8	16	3
10	6	20	0
		25	1

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-9	2	40-49	12	80-89	2
10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75-80	5	55-60	7	35-40	7
70-75	7	50-55	12	30-35	7

65-70	15	45-50	18	25-30	8
60-65	18	40-45	5	20-25	4

अभ्यास प्रष्न 8 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

तापमान ^0C	दिनों की संख्या	-10 to 0	42
-40 to -30	10	0 to 10	65
-30 to -20	28	10 to 20	180
-20 to -10	30	20 to 30	10

अभ्यास प्रष्न 9 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

प्राप्तांकों का प्रतिषत	विद्यार्थियों की संख्या
11-25	6
26-40	20
41-55	44
56-70	26
71-85	3
86-100	1

अभ्यास प्रष्न 10 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या
0-5	2	10-13	10	16-19	4
5-7	3	13-15	5	19-20	3
7-9	4	15-16	3	20-25	5
9-10	2				

अभ्यास प्रष्न 11 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-5	2	45-65	22

5-15	8	65-85	18
15-25	12	85-150	9
25-45	25	150-300	4

अभ्यास प्रश्न 12 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः—

केन्द्रीय आकार	आवृत्ति	केन्द्रीय आकार	आवृत्ति
14	1	22	37
16	7	24	29
18	10	26	9
20	44	28	3

अभ्यास प्रश्न 13 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 14 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
80% से कम	100	40% से कम	32
70% से कम	90	30% से कम	20
60% से कम	80	20% से कम	13
50% से कम	60	10% से कम	5

अभ्यास प्रश्न 15 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या	120 से अधिक	156	300 से अधिक	31

0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

अभ्यास प्रश्न 16 निम्न समंकों से माध्यिका की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 से अधिक	250	50 से अधिक	155
10 से अधिक	225	60 से अधिक	125
20 से अधिक	210	70 से अधिक	60
30 से अधिक	190	80 से अधिक	10
40 से अधिक	175	90 से अधिक	0

(3) विभाजन मान **(Divisible Values)**

उद्देश्य—

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- विभाजन मानों को परिभाषित कर सकें एवं विभिन्न प्रकार के विभाजन मानों के बारे में जान सकें।
- विभिन्न प्रकार के आंकड़ों के लिए, विभिन्न प्रकार के विभाजन मानों का परिकलन कर सकें।
- विभिन्न प्रकार के विभाजन मानों के विशेष गुणों का वर्णन कर सकें।
- विभिन्न प्रकार के विभाजन मानों का रेखाचित्रों द्वारा निर्धारण कर सकें।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में, विभिन्न प्रकार के विभाजन मानों के उपयोगों और सीमाओं का वर्णन कर सकेंगे।

प्रस्तावना—

जैसा कि आप जानते हैं, जब सभी मदों को परिमाण के क्रम में रखा जाए, तो माध्यिका, चर का मध्य मान होती है। इस प्रकार, माध्यिका, श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित करती है। अतः इसे एक स्थैतिक माध्य कहते हैं, वास्तव में ऐसे अन्य स्थैतिक माप भी हैं जो श्रेणी को, समान भागों की, अधिक बड़ी संख्या में, विभाजित करते हैं, जैसे चार समान भागों, या 10 समान भागों में या 100 समान भागों में । ऐसे मापों को, व्यापक रूप में, विभाजन मान कहते हैं। अधिक प्रयोग में आने वाले, तीन विभाजन मान हैं, (1) चतुर्थक (2) दशमक और (3) शतमक। इनके अतिरिक्त भी पंचमक, षटमक, सप्तमक, अष्टमक आदि अनेक विभाजन मानों का प्रयोग आवष्यकतानुसार किया जाता है। निस्संदेह ये अकेन्द्रीय स्थिति निर्धारण के माप है। आइये, अब इनके बारे में एक—एक करके, अध्ययन करें।

चतुर्थक (Quartiles)—

चर के उन मानों को, जो श्रेणी या बंटन को, 4 समान भागों में विभाजित करें, चतुर्थक कहते है। क्योंकि समंकों को 4 समान भागों में विभाजित करने के लिए, तीन बिंदु आवश्यक हैं, इसलिए तीन चतुर्थक होते है। जिन्हें Q_1 Q_2 और Q_3 द्वारा सूचित करते हैं।

पहला चतुर्थक (Q_1) जिसे निम्न चतुर्थक भी कहते हैं, चर का वह मान हैं, जिसके नीचे 25 प्रतिशत प्रेक्षण और जिसके ऊपर 75 प्रतिशत प्रेक्षण हों।

दूसरा चतुर्थक (Q_2) चर का वह मान है, जो बंटन को दो समान भागों में बाँट दें। इसका अभिप्राय यह है कि इसके ऊपर 50 प्रतिशत प्रेक्षण और नीचे 50 प्रतिशत प्रेक्षण होते हैं। इसलिए Q_2 और माध्यिका समरूप है, अतः इसकी अलग से गणना नहीं की जाती।

तीसरा चतुर्थक (Q_3 या $3Q_1$) जिसे ऊपरी चतुर्थक भी कहते हैं, चर का वह मान है, जिसके नीचे 75 प्रतिशत प्रेक्षण और जिसके ऊपर 25 प्रतिशत प्रेक्षण हों, स्पष्ट है कि $Q_1 < Q_2 < Q_3$

दशमक (Deciles)–

चर के उन मानों को जो श्रेणी के बंटन को दस समान भागों में बांट दें, दशमक कहते हैं। प्रत्येक भाग में कुल–प्रेक्षणों के 10 प्रतिशत प्रेक्षण होते हैं, स्पष्टतः ऐसे 9 मान होंगे, जिन्हें $D_1, D_2, D_3, \ldots\ldots D_9$ द्वारा सूचित करते है। इन्हें कहते हैं : पहला दशमक, दूसरा दशमक इत्यादि। पाँचवाँ दशमक (D_5) माध्यिका ही होता है।

शतमक (Percentiles)–

चर के उन मानों को जो श्रेणी के बंटन को सौ समान भागों में बांट दें, शतमक कहते हैं। प्रत्येक भाग में कुल–प्रेक्षणों के 1 प्रतिशत प्रेक्षण होते हैं, स्पष्टतः ऐसे 99 मान होंगे, जिन्हें $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_{99}$ द्वारा सूचित करते है। इन्हें कहते हैं : पहला शतमक, दूसरा शतमक ....निन्यानवेंवा शतमक इत्यादि। पचासवाँ दशमक (D_{50}) माध्यिका ही होता है।

विभाजन मानों का परिकलन–

अवर्गीकृत आंकड़ों और वर्गीकृत आंकड़ों दोनों ही के लिए, विभाजन मानों का परिकलन किया जा सकता है। परंतु, विधियाँ भिन्न हैं। आइये, वर्गीकृत और अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, विभाजन मानों के परिकलन की विधियों का पृथक्–पृथक् अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक –

आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात् विभाजन मानों को (N+1)/ विभाजन मान वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहाँ N मदों की कुल संख्या को सूचित करता है। विभिन्न विभाजन मानों के सूत्र निम्न हैं :

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$ इसी प्रकार

$$D_9 = \text{Size of } 9\left(\frac{N+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$P_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{100}\right)^{th} \text{ item}$$ इसी प्रकार

$$P_{99} = \text{Size of } 99\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

उदाहरण 11

निम्न समंकों से दोनों चतुर्थकों एवं तीसरे दशमक की गणना कीजियेः—

90, 95, 100, 102, 120, 125, 154, 164, 175, 180, 200, 210 एवं 250

हलः कुल प्रेक्षणों की संख्या (N) 13 है और यह श्रेणी पहले से ही आरोही क्रम में व्यवस्थित है, अतः सीधे ही विभाजन मानों की गणना करेंगेः

प्रथम चतुर्थक

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{13+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{14}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } 3.5^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } 3^{rd} \text{ item} + .5 \text{ of difference between } 3^{rd} \text{ and } 4^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = 100 + .5 \text{ of } (102\text{-}100)$$

$$Q_1 = 100 + .5 \text{ of } 2$$

$$Q_1 = 100 + 1$$

$$Q_1 = 101$$

इसी प्रकार **तृतीय चतुर्थक**

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{13+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \left(\frac{42}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 10.5^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 10^{th} \text{ item} + .5 \text{ of difference between } 10^{th} \text{ and } 11^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = 180 + .5 \text{ of } (200\text{-}180)$$

$$Q_3 = 180 + .5 \text{ of } 20$$

$$Q_3 = 180 + 10$$

$$Q_3 = 190$$

इसी प्रकार **तृतीय दषमक**

$$D_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{13+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_3 = \text{Size of } \left(\frac{42}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_3 = \text{Size of } 4.2^{th} \text{ item}$$

$$D_3 = \text{Size of } 4^{th} \text{ item} + .2 \text{ of difference between } 4^{th} \text{ and } 5^{th} \text{ item}$$

$$D_3 = 102 + .2 \text{ of } (120-102)$$

$$D_3 = 102 + .2 \text{ of } 18$$

$$D_3 = 102 + 3.6$$

$$D_3 = 105.6$$

वर्गीकृत समंक –

जैसा कि आपने पहले पढ़ा था, चरों को विच्छिन्न चरों तथा अविच्छिन्न चरों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को असतत बंटन (Discrete Series) तथा अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को सतत बंटन (Continuous Series) कहा जाता है। इन दो प्रकार के बंटनों के लिए विभाजन मानों का परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइए, अब इन विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणियों के लिए विभाजन मान

आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात् आवृत्तियों को संचयी (Cumulative) किया जाता है। विभाजन मानों को (N+1)/विभाजन मान वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहाँ N मदों की कुल संख्या अर्थात् आवृत्तियों के योग ($\sum f$) को सूचित करता है। सूत्र रुप में,

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$ इसी प्रकार

$$D_9 = \text{Size of } 9\left(\frac{N+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$P_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{100}\right)^{th} \text{ item}$$ इसी प्रकार

$$P_{99} = \text{Size of } 99\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

इस प्रकार से ज्ञात मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। जिस संचयी आवृत्ति में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को विभाजन मान माना जायेगा।

सतत श्रेणियों के लिए विभाजन मान

सतत श्रेणी के आवृत्ति बंटन की स्थिति में, विभिन्न मदों के यथार्थ मान ज्ञात नहीं होते। अतः किसी मद विशेष का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता। हम केवल इतना कर सकते हैं कि चर का वह मान ज्ञात कर लें, जिसके ऊपर या नीचे एक निष्चित मद हों, अतः विभाजन मानों के वर्ग का निर्धारण करने के लिए आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात् आवृत्तियों को संचयी (Cumulative) किया जाता है। विभाजन मानों के वर्ग को N/विभाजन मान वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहाँ N मदों की कुल संख्या अर्थात् आवृत्तियों के योग ($\sum f$) को सूचित करता है। सूत्र रुप में,

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$d_1 = \text{Size of } \left(\frac{N}{10}\right)^{th} \text{ item}$$ इसी प्रकार

$$d_9 = \text{Size of } 9\left(\frac{N}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$p_1 = \text{Size of } \left(\frac{N}{100}\right)^{th} \text{ item}$$ इसी प्रकार

$$p_{99} = \text{Size of } 99\left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। जिस संचयी आवृत्ति में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को विभाजन मानों का वर्ग माना जायेगा। विभाजन मानों का वर्ग निर्धारित करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा, उन्हीं तीन विधियों में से किसी एक को अपना कर निर्धारित किया जा सकता है जैसे माध्यिका का करते थे।

उदाहरण 12

निम्न समंकों से दोनों चतुर्थकों, आठवें दशमक एवं अठयानवेंवें शतमक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	60	50	30	15	12	3

हलः

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*)	संचयी आवृत्ति *cf*
1	8	8
2	12	20
3	20	40
4	40	80
5	60	140
6	50	190
7	30	220
8	15	235
9	12	247
10	3	250

	N = $\sum f$ = 250	

हलः

कुल प्रेक्षणों की संख्या (N) 250 है और यह श्रेणी पहले से ही आरोही क्रम में व्यवस्थित है, अतः सीधे ही विभाजन मानों की गणना करेंगेः

प्रथम चतुर्थक

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{250+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{251}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } 62.75^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्तियों में यह मान सर्वप्रथम 80 में प्राप्त होगा, उसी के आकार अर्थात् 4 को विभाजन मान माना जायेगा।

$$Q_1 = 4$$

इसी प्रकार **तृतीय चतुर्थक**

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{250+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \left(\frac{753}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 188.25^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्तियों में यह मान सर्वप्रथम 190 में प्राप्त होगा, उसी के आकार अर्थात् 6 को विभाजन मान माना जायेगा।

$$Q_3 = 6$$

इसी प्रकार **आठवां दषमक**

$$D_8 = \text{Size of } 8\left(\frac{N+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_8 = \text{Size of } 8\left(\frac{250+1}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_8 = \text{Size of } \left(\frac{2008}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$D_8 = \text{Size of } 200.8^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्तियों में यह मान सर्वप्रथम 220 में प्राप्त होगा, उसी के आकार अर्थात् 7 को विभाजन मान माना जायेगा।

$$D_8 = 7$$

इसी प्रकार **अठयानवेंवां षतमक**

$$P_{98} = \text{Size of } 98\left(\frac{N+1}{100}\right)^{th} \text{ item}$$

$$P_{98} = \text{Size of } 98\left(\frac{250+1}{100}\right)^{th} \text{ item}$$

$$P_{98} = \text{Size of } \left(\frac{24598}{100}\right)^{th} \text{ item}$$

$$P_{98} = \text{Size of } 245.98^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्तियों में यह मान सर्वप्रथम 247 में प्राप्त होगा, उसी के आकार अर्थात् 9 को विभाजन मान माना जायेगा।

$$P_{98} = 9$$

उदाहरण 13

निम्न समंकों से दोनों चतुर्थकों, नवें दशमक एवं पैंतालीसवेंवें शतमक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक (से कम)		10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या	4	16	40	76	96	112	120	125	

हलः

चूंकि श्रेणी 'से कम' रुप में है, अतः उसे पहले साधारण वर्गान्तरों में निम्न प्रकार बदला जायेगा—

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (f)	प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (f)
10 से कम	4	0-10	4
20 से कम	16	10-20	16-4=12
30 से कम	40	20-30	40-16=24
40 से कम	76	30-40	76-40=36
50 से कम	96	40-50	96-76=20
60 से कम	112	50-60	112-96=16
70 से कम	120	60-70	120-112=8
80 से कम	125	70-80	125-120=5
			$\sum f$ = 125

यदि श्रेणी 'से कम' रुप में होती है, तो आवृत्तियां स्वतः संचयी आवृत्तियों के रुप में होती हैं। जैसा कि उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है। अतः अब सीधे ही विभाजन मानों की गणना करेंगेः

प्रथम चतुर्थक

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{125}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_1 = \text{Size of } 31.25^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 40 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 20—30 को प्रथम चतुर्थक वर्ग माना जायेगा। अब इस वर्ग का निर्धारण करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा, माध्यिका वाली तीन विधियों में से किसी एक को अपना कर, निर्धारित किया जा सकता है।

$$Q_1 = L + \frac{i}{f} \times (q_1 - c)$$

जहाँ,

L का अर्थ प्रथम चतुर्थक वर्ग की निचली सीमा = 20

i का अर्थ प्रथम चतुर्थक वर्ग का वर्गान्तर = 10

f का अर्थ प्रथम चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति = 24

q_1 का अर्थ Size of $\left(\frac{N}{4}\right)^{th}$ item = 31.25 एवं

c का अर्थ प्रथम चतुर्थक वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति = 16 से है। अतः

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{24} \times (31.25 - 16)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{24} \times (15.25)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{152.5}{24}$$

$$Q_1 = 20 + 6.35$$

$$Q_1 = 26.35$$

इसी प्रकार **तृतीय चतुर्थक**

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{125}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } \left(\frac{375}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 93.75^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 96 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 40—50 को तृतीय चतुर्थक वर्ग माना जायेगा। अब

$$Q_3 = L + \frac{i}{f} \times (q_3 - c)$$

जहाँ,

L का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग की निचली सीमा = 40

i का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग का वर्गान्तर = 10

f का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति = 20

q_3 का अर्थ Size of $3\left(\frac{N}{4}\right)^{th}$ item = 93.75 एवं

c का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति = 76 से है। अतः

$$Q_3 = 40 + \frac{10}{20} \times (93.75 - 76)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{10}{20} \times (17.75)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{177.5}{20}$$

$$Q_3 = 40 + 8.875$$

$$Q_3 = 48.875 = 48.88$$

इसी प्रकार **नवां दषमक**

$$d_9 = \text{Size of } 9\left(\frac{N}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$d_9 = \text{Size of } 9\left(\frac{125}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$d_9 = \text{Size of } \left(\frac{1125}{10}\right)^{th} \text{ item}$$

$$d_9 = \text{Size of } 112.5^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 120 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 60–70 को नवां दषमक वर्ग माना जायेगा। अब

$$D_9 = L + \frac{i}{f} \times (d_9 - c)$$

जहाँ,

L का अर्थ नवें दषमक वर्ग की निचली सीमा = 60

i का अर्थ नवें दषमक वर्ग का वर्गान्तर = 10

f का अर्थ नवें दषमक वर्ग की आवृत्ति = 8

d_9 का अर्थ Size of $9\left(\frac{N}{10}\right)^{th}$ item = 112.5 एवं

c का अर्थ नवें दषमक वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति = 112 से है। अतः

$$D_9 = 60 + \frac{10}{8} \times (112.5 - 112)$$

$$D_9 = 60 + \frac{10}{8} \times (0.5)$$

$$D_9 = 60 + \frac{5}{8}$$

$$D_9 = 60 + 0.625$$

$$D_9 = 60.625 = 60.63$$

इसी प्रकार **पैंतालीसवां षतमक**

$$p_{45} = \text{Size of } 45\left(\frac{N}{100}\right)^{th} \text{ item}$$

$$p_{45} = \text{Size of } 45\left(\frac{125}{100}\right)^{th} \text{ item}$$

$$p_{45} = \text{Size of } \left(\frac{5625}{100}\right)^{th} \text{ item}$$

$$p_{45} = \text{Size of } 56.25^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 76 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 30–40 को 45वां षतमक वर्ग माना जायेगा। अब

$$P_{45} = L + \frac{i}{f} \text{ x } (p_{45} - c)$$

जहाँ,

L का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग की निचली सीमा = 30

i का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग का वर्गान्तर = 10

f का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति = 36

p_{45} का अर्थ Size of $45\left(\frac{N}{100}\right)^{th}$ item = 56.25 एवं

c का अर्थ तृतीय चतुर्थक वर्ग से तुरन्त पूर्व की संचयी आवृत्ति = 40 से है। अतः

$$P_{45} = 30 + \frac{10}{36} \text{ x } (56.25 - 40)$$

$$P_{45} = 30 + \frac{10}{36} \text{ x } (16.25)$$

$$P_{45} = 30 + \frac{162.5}{36}$$

$$P_{45} = 30 + 4.51$$

$$P_{45} = 34.51$$

ध्यान देने योग्य विषेष बिन्दु

- विभाजन मानों की गणना करने की विधि में श्रेणी के आरोही क्रम में होना श्रेयस्कर होता है। अवरोही क्रम होने पर सभी विभाजन मान उलट जाते हैं अर्थात् प्रथम चतुर्थक तृतीय हो जाता है और तृतीय प्रथम। साथ ही असतत श्रेणी में संचयी आवृत्ति ज्ञात करने एवं तद्नुसार अंतर्वेशन के लिये सूत्र का प्रयोग करने में यथेष्ट सावधानी आवष्यक है।
- विभाजन मानों की गणना करने की विधि में श्रेणी के समान अथवा असमान वर्गान्तर से कोई अन्तर नहीं पड़ता परन्तु असतत श्रेणी में अंतर्वेशन के लिये सूत्र में वर्गान्तर विभाजन मान वर्ग का ही प्रयोग किया जायेगा।
- विभाजन मानों की गणना करने की विधि में श्रेणी के अपवर्जी स्वरुप में होना आवष्यक है, समावेषी श्रेणी में 0.5 का समायोजन करके उसे अपवर्जी में परिवर्तित करना पड़ेगा।

- विभाजन मानों की गणना करने की विधि में श्रेणी के 'से कम' अथवा 'से अधिक' रुप में होने पर उसे पहले साधारण वर्ग समूहों में बदलना होता है।

सारांश–

माध्यिका के सदृश, कुछ अन्य स्थैतिक माप भी है, जिन्हें विभाजन मान कहते हैं और जो श्रेणी को अधिक संख्या के समान भागों में विभाजित करते हैं। (1) चतुर्थक (2) दशमक और (3) शतमक। चतुर्थक, चर के तीन ऐसे मान हैं जो श्रेणी को चार समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक भाग में कुल प्रेक्षणों के 25 प्रतिशत प्रेक्षण होते हैं। दशमक, चर के वे नौ ऐसे मान हैं जो श्रेणी को दस समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक ऐसे भाग में, कुल प्रेक्षणों के 10 प्रतिशत प्रेक्षण होते हैं। शतमक, चर के वे मान हैं जो श्रेणी को 100 समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक ऐसे भाग में कुल प्रेक्षणों के 1 प्रतिशत होते हैं।

विभागत मानों के परिकलन के लिए, माध्यिका के लिए निर्दिष्ट प्रक्रिया के प्रायः समरूप प्रक्रियाओं का अनुसरण करते हैं।

रेखाचित्र द्वारा निर्धारण–

माध्यिका को और विभाजन मानों को भी, रेखाचित्र में, तोरण (वक्र) द्वारा स्थापित कर सकते हैं। इस उद्देश्य के लिए, 'से कम' तोरण का अधिक प्रयोग होता है यद्यपि इसे 'से अधिक' तोरण द्वारा भी बनाया जा सकता है। इसे 'ओजाइव वक्र (Ogive Curve) भी कहते हैं।

उदाहरण 14

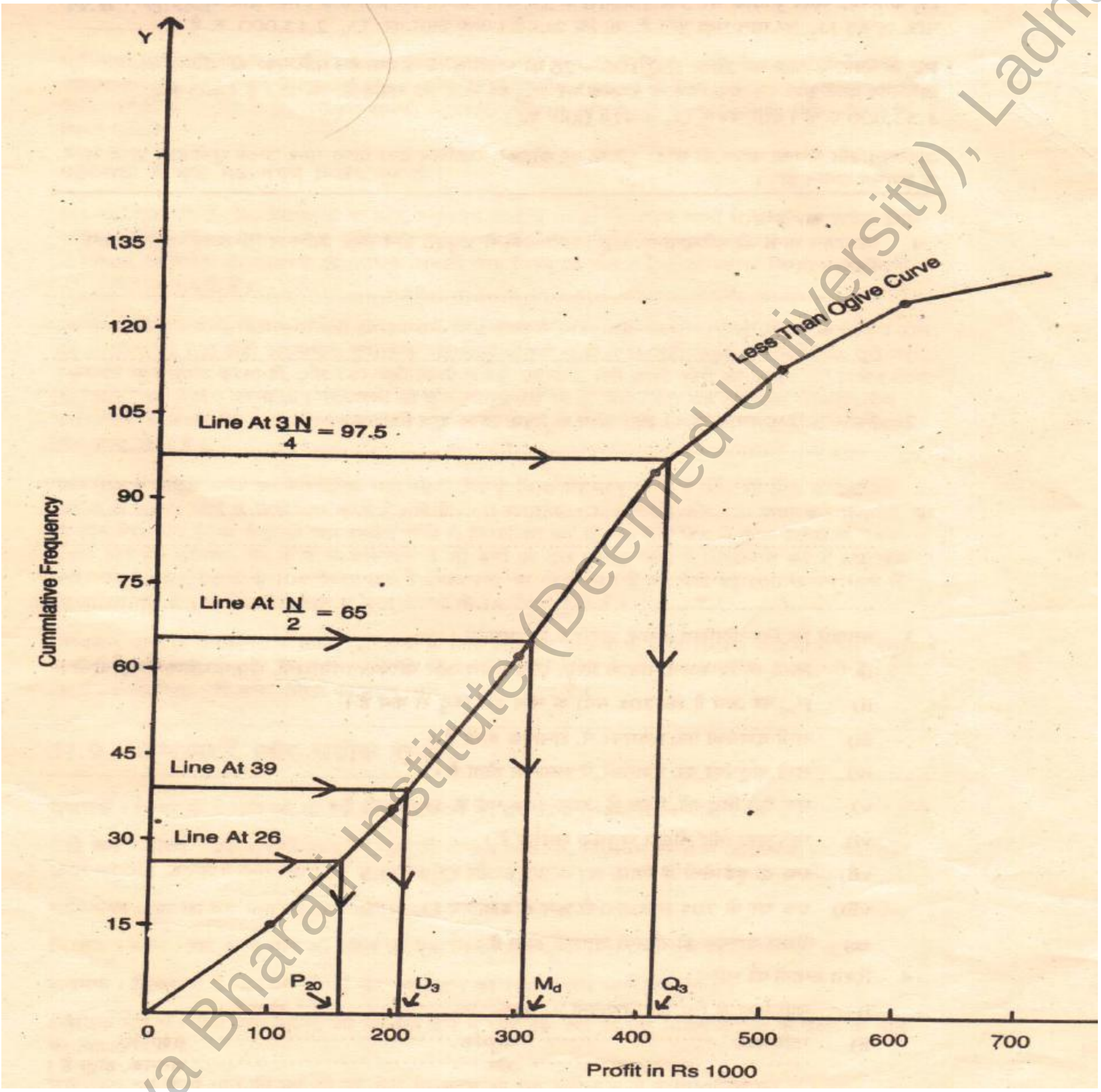
निम्न समंकों से रेखाचित्र के माध्यम से माध्यिका, दोनों चतुर्थकों, तीसरे दशमक एवं बीसवें शतमक की गणना कीजियेः–

लाभ प्रति दुकान हजार रु. में	दुकानों की संख्या
100 से कम	15
200 से कम	35
300 से कम	63
400 से कम	95
500 से कम	113
600 से कम	125
700 से कम	130

हलः

चूंकि श्रेणी 'से कम' रुप में है, अतः उससे सीधे ही 'से कम' तोरण की रचना कर ली जायेगी। इसके लिए ox अक्ष पर लाभ तथा oy अक्ष पर संचयी आवृत्तियों को प्रदर्षित किया जायेगा। फिर माध्यिका के लिये oy अक्ष पर N/2 = 130/2 = 65 पर एक क्षैतिज रेखा खींचेंगे जहां वह रेखा तोरण का प्रतिच्छेद करे वहां से ox अक्ष के लिये एक लम्बवत् रेखा खींचेंगे, ox अक्ष का तत्संबंधी मान (307) ही माध्यिका होगा। यही प्रक्रिया विभाजन मानों के लिये भी लगाई जायेगी। दोनों चतुर्थकों के लिये क्रमषः N/4 = 130/4 = 32.5 एवं 3N/4 = 390/4 = 97.5 पर क्षैतिज रेखायें खींचेंगे जहां वे तोरण का प्रतिच्छेद करे वहां से ox अक्ष के लिये लम्बवत् रेखायें खींचेंगे, ox अक्ष के तत्संबंधी मान (187.5 व 414) ही चतुर्थक होंगे। तीसरे दशमक के लिये 3N/10 = 390/10 = 39 एवं बीसवें

शतमक के लिये 20N/100 = 2600/100 = 26 पर यही प्रक्रिया अपनायी जायेगी और तत्संबंधी मान (213 व 153) ही तीसरे दशमक एवं बीसवें शतमक होंगे।



अभ्यास प्रश्न 1 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थकों की गणना कीजियेः–

87, 38, 52, 75, 63, 47, 15, 28, 80, 71, 69, 55, 24, 36 एवं 38

अभ्यास प्रश्न 2 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, चौथा दषमक एवं 96वेंवा शतमक ज्ञात कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	10	172

5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12
9	176	योग	800

अभ्यास प्रश्न 3 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, 7वां दषमक एवं 99वेंवा शतमक ज्ञात कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से माध्यिका, दोनों चतुर्थक, आठवां दषमक एवं 46वा शतमक ज्ञात कीजिये तथा एक 'से कम' तोरण बनाकर अपनी गणनाओं का रेखाचित्र से मिलान कीजिये।ः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-9	2	40-49	12	80-89	2
10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, चौथा दषमक एवं 28वां शतमक ज्ञात कीजियेः–

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75-80	5	55-60	7	35-40	7
70-75	7	50-55	12	30-35	7
65-70	15	45-50	18	25-30	8
60-65	18	40-45	5	20-25	4

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थकों की गणना कीजियेः–

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या
0-5	2	10-13	10	16-19	4
5-7	3	13-15	5	19-20	3
7-9	4	15-16	3	20-25	5
9-10	2				

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, चौथा दषमक एवं 96वेंवा शतमक ज्ञात कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 8 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, छठा दषमक एवं नब्बेवां शतमक ज्ञात कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या				
		120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

(4) बहुलक या भूयिष्ठक **(Mode)**

उद्देश्य—

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- भूयिष्ठक को परिभाषित कर सके।
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए, भूयिष्ठक का परिकलन कर सके।
- भूयिष्ठक को रेखाचित्रों द्वारा निर्धारित कर सके।
- भूयिष्ठक के उपयोगों और परिसीमाओं का अभिमूल्यन कर सके।

प्रस्तावना—

जैसा कि आप जानते हैं, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में, कुछ माप ऐसे हैं जो समंकों के सभी मदों पर आधारित होते हैं, और कुछ अन्य माप ऐसे हैं, जो स्थैतिक माध्य हैं। पहले आपने समांतर माध्य के बारे में अध्ययन किया है, जो समंकों के सभी मदों पर आधारित है। फिर आपने माध्यिका के बारे में भी अध्ययन किया, जो एक स्थैतिक माध्य है। अब आप एक अन्य स्थैतिक माध्य, भूयिष्ठक के अर्थ, परिकलन विधियों, आलेखीय निर्धारण, परिसीमाओं और उपयोगों के बारे में पढ़ेंगे।

भूयिष्ठक किसे कहते हैं ?

भूयिष्ठक भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है। भूयिष्ठक चर का वह मान है, जो दिए गए समंक समूह में, सर्वाधिक बार दोहराया गया हो। अंग्रेजी में, भूयिष्ठक का पर्याय शब्द हैं, ''मोड स्वयं जिसकी उत्पत्ति फ्रांसिसी भाषा के शब्द ''ला मोडे'' से हुई है, जिसका अर्थ है ''फैशन'' अतः भूयिष्ठक, सर्वाधिक सामान्य या सर्वाधिक लोकाचार के अनुरूप मान होता है।

बहुधा, भूयिष्ठक चर का वह मान माना जाता है, जो सर्वाधिक बार आए। परंतु, यह सभी आवृत्ति बंटनों के लिए यथार्थतः सत्य नहीं है। वस्तुतः भूयिष्ठक चर का वह मान है, जिसके गिर्द, अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता के साथ, संकेन्द्रित होने का प्रयत्न करें। यह, एक मान पर और उसके गिर्द, आवृत्ति संकेन्द्रण के केन्द्र को प्रकट करता है। यह, समांतर माध्य के सदृश, गुरुत्व केन्द्र नहीं है। यह तो, माध्यिका के सदृश, एक स्थैतिक माप है। इसे प्रायः प्रतीक श्ड्वश या ˊ द्वारा सूचित किया जाता है।

उदाहरण के लिए, एक जूता बेचने वाले दुकानदार को लीजिये। उसकी अभिरूचि यह ज्ञात करने में है कि जूता के वे कौन से आमाप हैं, जिनकी सामान्य रूप में सर्वाधिक मांग है। इस स्थिति पर ध्यान दीजिए। समांतर माध्य एक ऐसा आमाप हो सकता है, जो किसी व्यक्ति को भी ठीक न बैठे। बंटन में असमता के कारण, हो सकता है कि माध्यिका भी एक प्रतिनिधि आमाप न दे सके। भूयिष्ठक ही, एक ऐसा माप है, जो एक सन्निकट आमाप के चयन में हमारी सहायता कर सकता है, और जिसके लिए ऑर्डर दिया जा कसता है।

भूयिष्ठक का परिकलन–

वर्गीकृत समंकों और अवर्गीकृत समंकों के लिए, भूयिष्ठक परिकलन की विधियाँ भिन्न हैं। आइये, अब इन विधियों का अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक–

अवर्गीकृत समंकों के लिए, निरीक्षण मात्र से ही भूयिष्ठक ज्ञात कर सकते हैं। चर के उस मान को, जो दिये गए समंकों में सर्वाधिक बार उपस्थित हो, भूयिष्ठक मानते हैं।

उदाहरण के लिए, 10 लड़कों की आयु (वर्षो में) निम्नानुसार है : 5, 6, 4, 10, 7, 6, 9, 2, 8, 6 यहाँ संख्या 6 तीन बार (अर्थात् सर्वाधिक बार) आई है। अतः भूयिष्ठक आयु है, 6 वर्ष।

कुछ स्थितियों में इस प्रकार भूयिष्ठक विद्यमान नहीं होता। उदाहरण के लिए निम्न समंक समूह का विचार कीजिए : 5, 10, 15, 20, 25, 30 इस स्थिति में कोई भूयिष्ठक नहीं है, क्योंकि कोई भी संख्या दोहरायी नहीं गई है।

कुछ स्थितियों में एक से अधिक भूयिष्ठक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, एक टाइपिस्ट ने 10 पृष्ठ टाईप किए और प्रति पृष्ठ अशुद्धियों की संख्या निम्नानुसार है : 5, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 4 इस स्थिति में, संख्याएँ 2 और 1 दोनों ही समान बार उपस्थिति होती हैं। अतः इस श्रेणी में, दो भूयिष्ठक है : 2 और 1 । इसी प्रकार, एक बंटन त्रि–भूयिष्ठक या बहु भूयिष्ठक भी हो सकता है। ऐसे बंटनों के लिए, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में भूयिष्ठक की कोई सार्थकता नहीं है। अवर्गीकृत समंकों के लिए, बहुलक का बहुत सीमित उपयोग है।

वर्गीकृत समंक–

सतत बंटन और असतत बंटन के लिए भूयिष्ठक परिकलन की विधियाँ भिन्न है। आइये, इब इन विधियों का विस्तार से अध्ययन करें।

असतत श्रेणी–

असतत बंटन अर्थात् जब श्रेणी के व्यक्तिगत मदों के मान ज्ञात हों, के लिए, भूयिष्ठक का निर्धारण निरीक्षण मात्र से ही कर सकते हैं। निरीक्षण द्वारा, आप चर का वह मान ज्ञात कर सकते हैं, जिसके गिर्द मदें सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्द्रित हों। उदाहरण के लिए, निम्न आवृत्ति बंटन का अध्ययन कीजिए :

मदों का मान	:	20	21	22	23	24	25
आवृत्ति	:	15	20	25	45	30	12

इस आवृत्ति बंटन में, मान 23 की आवृत्ति सर्वाधिक है। इसका अभिप्राय है कि इस मान के गिर्द, मदों का संकेन्द्रण सर्वाधिक है। अतः भूयिष्ठक 23 हे। इस प्रकार की प्रत्येक श्रेणी में, भूयिष्ठक ज्ञात करना सरल है। परंतु, कठिनाई वहाँ आ जाती है जब पास के दो या दो से अधिक वर्गों में, संकेन्द्रण प्रायः समान हो; अर्थात् अधिकतम आवृत्ति और उसके पूर्ववर्ती आवृत्ति या अनुवर्ती आवृत्ति में अंतर कम हो। ऐसी स्थिति में बहुलक निर्धारित करने के लिए, समूहन और विश्लेषण की आवश्यकता होती है।

समूहन सारणी : समूहन सारणी में छः स्तम्भ होते हैं। इनकी व्याख्या निम्नानुसार है :

स्तम्भ 1 : यह स्तम्भ सारणियों का है। प्रत्येक वर्ग के सम्मुख, इस स्तम्भ में, उसकी आवृत्ति लिखी होती है। अधिकतम आवृत्ति को अंकित कर देते है या एक वृत्त द्वारा घेर देते हैं।

स्तम्भ 2 : इस स्तम्भ में, दो–दो आवृत्तियों का समूहन करते हैं। उनके (अर्थात् समूहों के) जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं या एक वृत्त द्वारा घेर देते हैं।

स्तम्भ 3 : ऊपर से पहली आवृत्ति को छोड़ कर, शेष आवृत्तियों का, दो–दो का समूहन करते हैं। अधिकतम जोड़ अंकित कर देते हैं।

स्तम्भ 4 : ऊपर की ओर से, तीन–तीन आवृत्तियों का समूहन करते हैं। उनके जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं।

स्तम्भ 5 : ऊपर से, पहली आवृत्ति को छोड़ कर, शेष आवृत्तियों का तीन–तीन का समूहन करते हैं। उनके जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित करते हैं।

स्तम्भ 6 : ऊपर से पहली दो आवृत्तियों को छोड़कर, शेष आवृत्तियों का, तीन–तीन का समूहन करते हैं। उनके जोड़ करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित करते हैं।

विश्लेषण सारणी : समूहन सारणी बनाने के पश्चात्, एक विश्लेषण सारणी बनानी होती है। यह सारणी दुहरे रूप में होती है : (1) लम्ब रूप में (अर्थात् अनुशीर्षक) समूहन सारणी में प्रयुक्त स्तम्भ संख्याएँ (क्रम संख्याएँ) होती है। (2) क्षैतिज रूप में, (अर्थात् उपशीर्षक) विचर के मान (या वर्ग) लेते हैं। अब आप समूहन सारणी को लीजिए, जिसके प्रत्येक स्तम्भ में, अधितम आवृत्ति जोड़ को अंकित किया गया है। अब इन 6 वृत्तों द्वारा घेरी गई आवृत्तियों को बारी–बारी से, उनके विचर मानों के साथ लीजिए। विश्लेषण सारणी में, इन मानों के नीचे (अर्थात् स्तम्भ में) और सम्बद्ध स्तम्भों की पंक्तियों में, मिलान दंडिकाएँ रख देते है। विश्लेषण सारणी के प्रत्येक स्तम्भ में, मिलान दंडिकाओं की कुल संख्या को, (उसी स्तम्भ में और) अंतिम पंक्ति में लिख देते हैं। इन संख्याओं में, अधिकतम को अंकित करते हैं। इस अधिकतम संख्या के संगत चर का मान ही, भूयिष्ठक प्रदान करता है।

उदाहरण 15

निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	40	60	50	30	15

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 60 है जिसका आकार 5 है अतः भूयिष्ठक का मान 5 (Z or M_O = 5) है। आइये समूहन और विश्लेषण द्वारा भूयिष्ठक के मान की जांच करें–

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*) i	ii	iii	iv	v	vi	विष्लेषण	
1	8	20						
2	12		32	40				
3	20	60			72		I	1
4	40		$\boxed{100}$			$\boxed{120}$	III	3
5	$\boxed{60}$	$\boxed{110}$		$\boxed{150}$			~~IIII~~ I	6
6	50		80		$\boxed{140}$		III	3
7	30	45				95	I	1
8	15							

आपने देखा कि सर्वाधिक मिलान दंडिकाएँ 6 हैं जो आकार 5 के ठीक सामने हैं। अतः भूयिष्ठक का मान 5 (Z or M_O = 5) है।

उदाहरण 16

निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6	7	8
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	60	50	40	30	15

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 60 है जिसका आकार 4 है अतः भूयिष्ठक का मान 4 (Z or M_O = 4) है। आइये समूहन और विश्लेषण द्वारा भूयिष्ठक के मान की जांच करें–

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*) i	ii	iii	iv	v	vi	विष्लेषण

1	8			40				
2	12	20	32		92			
3	20					130	I	1
4	$\boxed{60}$	80	110	150			IIII	4
5	50				120		IIII	5
6	40	90	70			85	III	3
7	30						I	1
8	15	45						

आपने देखा कि सर्वाधिक मिलान दंडिकाएँ 5 हैं जो आकार 5 के ठीक सामने हैं। अतः भूयिष्ठक का मान 5 (Z or M_O = 5) है।

उपरोक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि समूहन विधि से ज्ञात भूयिष्ठक निरीक्षण द्वारा ज्ञात भूयिष्ठक से भिन्न भी हो सकता है, ऐसी स्थिति में समूहन विधि से ज्ञात भूयिष्ठक ही भूयिष्ठक माना जायेगा।

ध्यान देने योग्य विषेष बिन्दु

यदि भूयिष्ठक निरीक्षण द्वारा प्रथम अथवा अन्तिम वर्ग में स्पष्ट हो रहा है तो समूहन विधि से भूयिष्ठक ज्ञात नहीं करना चाहिये क्योंकि ऐसी स्थिति में समूहन विधि से ज्ञात भूयिष्ठक गलत होता है। वास्तव में समूहन विधि से ज्ञात भूयिष्ठक प्रथम अथवा अन्तिम वर्ग में आ ही नहीं सकता क्योंकि समूहन विधि में स्तम्भ 3, 5, 6 में प्रथम वर्ग को छोड़ दिया जाता है।

सतत श्रेणी–

सतत बंटन में भी पहले असतत की भांति निरीक्षण अथवा समूहन विधि से भूयिष्ठक वर्ग का निर्धारण कर लेते हैं। फिर चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा निम्न सूत्र की सहायता से निर्धारित किया जा सकता है:–

$$Z \text{ या } M_O = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i \quad \text{अथवा} \quad Z \text{ या } M_O = U - \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

जहाँ,

Z या M_O का अर्थ भूयिष्ठक,

L का अर्थ भूयिष्ठक वर्ग की निचली सीमा

U का अर्थ भूयिष्ठक वर्ग की ऊपरी सीमा

Δ_1 का अर्थ $|f_1 - f_0|$

Δ_2 का अर्थ $|f_1 - f_2|$ एवं

i का अर्थ श्रेणी के वर्गान्तर से है।

यहाँ,

। f_1 - f_0 **।** का अर्थ भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति में से उससे तुरन्त पूर्व की आवृत्ति को घटाकर प्राप्त ऐसी संख्या जिसके + एवं – चिन्हों का ध्यान न रखा जाये, एवं

। f_1 - f_2 **।** का अर्थ भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति में से उससे तुरन्त बाद की आवृत्ति को घटाकर प्राप्त ऐसी संख्या जिसके + एवं – चिन्हों का ध्यान न रखा जाये।

उदाहरण 17

निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	20	60	50
प्राप्तांक	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियों की संख्या	40	30	15	12	3

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 60 है जिसका आकार 30–40 है अतः यह भूयिष्ठक वर्ग है, अब समूहन और विश्लेषण द्वारा इसकी जांच करें–

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*) i	ii	iii	iv	v	vi	विष्लेषण	
0-10	8	} 20		} 40				
10-20	12		} 32		} 92			
20-30	20	} 80				} $\boxed{130}$	I	1
30-40	$\boxed{60}$		} $\boxed{110}$	} $\boxed{150}$			IIII	4
40-50	50	} $\boxed{90}$			} $\boxed{120}$		~~IIII~~	5
50-60	40		} 70			} 85	III	3
60-70	30	} 45		} 57			I	1
70-80	15		} 27		} 30			
80-90	12	} 15						
90-100	3							

आपने देखा कि सर्वाधिक मिलान दंडिकाएँ 5 हैं जो आकार 40–50 के ठीक सामने हैं। अतः यही भूयिष्ठक वर्ग है। अब भूयिष्ठक (Z या M_O) का यथार्थ मान, इस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा निम्न सूत्र की सहायता से निर्धारित किया जा सकता हैः–

$$Z \text{ या } M_O = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

जहाँ,

L का अर्थ भूयिष्ठक वर्ग की निचली सीमा = 40

Δ_1 का अर्थ $|f_1 - f_0|$ अर्थात् भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति (50) में से उससे तुरन्त पूर्व की आवृत्ति (60) को घटाकर प्राप्त ऐसी संख्या जिसके + एवं – चिन्हों का ध्यान न रखा जाये = 10

Δ_2 का अर्थ $|f_1 - f_2|$ अर्थात् भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति (50) में से उससे तुरन्त बाद की आवृत्ति (40) को घटाकर प्राप्त ऐसी संख्या जिसके + एवं – चिन्हों का ध्यान न रखा जाये = 10 एवं

i का अर्थ श्रेणी के वर्गान्तर से है = 10

$$Z \text{ या } M_O = 40 + \frac{10}{10 + 10} \times 10$$

$$Z \text{ या } M_O = 40 + \frac{10}{20} \times 10$$

$$Z \text{ या } M_O = 40 + 5$$

$$Z \text{ या } M_O = 45$$

ध्यान देने योग्य विषेष बिन्दु

- भूयिष्ठक की गणना करने की विधि में श्रेणी के आरोही क्रम में होना श्रेयस्कर होता है। अवरोही क्रम होने पर अंतर्वेशन के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करना होता हैः–

$$Z \text{ या } M_O = U - \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

- भूयिष्ठक की गणना करने की विधि में श्रेणी के वर्गान्तर समान होने चाहिये। असमान वर्गान्तर होने पर उन्हें समान वर्गान्तर बनाने का प्रयास करना चाहिये, यदि ऐसा करने से 4 से भी कम समूह बन रहे हैं तो सारे वर्गान्तर समान न करके केवल f_1, f_0 एवं f_2 वाले समूहों का ही वर्गान्तर समान किया जायेगा। अंतर्वेशन के लिये विधि समान रहेगी।

उदाहरण 18 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः–

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या
0-5	2
5-7	3
7-9	4
9-10	2

10-13	10
13-15	5
15-16	3
16-19	4
19-20	3
20-25	5

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि उपरोक्त श्रेणी के वर्गान्तर असमान हैं। सर्वाधिक वर्गान्तर 5 का है अतः समान वर्गान्तर वाली श्रेणी निम्न प्रकार बनेगीः—

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या
0-5	2
5-10	3+4+2=9
10-15	10+5=15
15-20	3+4+3=10
20-25	5

आपने देखा कि समान वर्गान्तर बनाने का प्रयास करने पर 5 समूह बन रहे हैं तो अब भूयिष्ठक की गणना करने की शेष सारी विधि समान रहेगी, जिसका आप स्वयं अभ्यास करें।

उदाहरण 19 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0.5	2	45.65	22
5.15	8	65.85	18
15.25	12	85.150	9
25.45	25	150.300	4

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि उपरोक्त श्रेणी के वर्गान्तर असमान हैं। सर्वाधिक वर्गान्तर 150 का है अतः समान वर्गान्तर वाली श्रेणी निम्न प्रकार बनेगीः—

आकार	आवृत्ति

0.150	2̣8̣12̣25̣22̣18̣9त्र96
150.300	4

आपने देखा कि समान वर्गान्तर बनाने का प्रयास करने पर केवल 2 समूह बन रहे हैं अतः सारे वर्गान्तर समान न करके केवल f_1, f_0 एवं f_2 वाले समूहों का ही वर्गान्तर समान किया जायेगा। निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 25 है जिसका आकार 25–45 है अतः यह भूयिष्ठक वर्ग है। चूंकि इसका वर्गान्तर 20 है तो इसके तुरन्त पूर्व और तुरन्त बाद के आकारों का वर्गान्तर भी एक समान यानि 20 होना चाहिये। आप देखेंगे कि भूयिष्ठक के तुरन्त बाद वाला समूह 45–65 है जिसका वर्गान्तर भी 20 ही है परन्तु भूयिष्ठक के तुरन्त पहले वाला समूह 15–25 है जिसका वर्गान्तर 10 ही है और उससे भी पहले वाला समूह 5–15 है जिसका वर्गान्तर भी 10 ही है, अतः यदि हम इन दोनों समूहों को मिला दें तो f_1, f_0 एवं f_2 वाले समूहों का वर्गान्तर समान हो जायेगा। अब हमारे सामने निम्न श्रेणी होगीः–

आकार	आवृत्ति
0-5	2
5-25	8+12=20 f_0
25-45	25 f_1
45-65	22 f_2
65-85	18
85-150	9
150-300	4

भूयिष्ठक की गणना करने की शेष सारी विधि समान है, जिसका आप स्वयं अभ्यास करें।

- भूयिष्ठक की गणना करने की विधि में श्रेणी के अपवर्जी स्वरुप में होना आवष्यक है, समावेषी श्रेणी में 0.5 का समायोजन करके उसे अपवर्जी में परिवर्तित करना पड़ेगा।
- भूयिष्ठक की गणना करने की विधि में श्रेणी के 'से कम' अथवा 'से अधिक' रुप में होने पर उसे पहले साधारण वर्ग समूहों में बदलना होता है।
- भूयिष्ठक की गणना करने में यदि सतत श्रेणी में समूहन विधि के बाद भी एक से अधिक भूयिष्ठक वर्ग आ रहे हों तो भूयिष्ठक की गणना समान्तर माध्य एवं माध्यिका पर आधारित निम्न सूत्र से की जाती हैः–

$$Z \text{ या } M_O = 3\ M_d - 2\ \overline{X}$$

उदाहरण 20 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
40-49	7	80-89	13
50-59	9	90-99	10

60-69	10	100-109	12
70-79	6	110-119	7

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 13 है जिसका आकार 80–89 है अतः यह भूयिष्ठक वर्ग है, अब समूहन और विश्लेषण द्वारा इसकी जांच करें साथ ही यह श्रेणी समावेषी भी है अतः इसे 0.5 के समायोजन द्वारा अपवर्जी में परिवर्तित भी कर लें–

आकार (x)	आवृत्ति (f) i	ii	iii	iv	v	vi	विष्लेषण	
39.5-49.5	7	16		26				
49.5-59.5	9		19		25			
59.5-69.5	10	16				29	I	1
69.5-79.5	6		19	29			II	2
79.5-89.5	13	23			35		卌	5
89.5-99.5	10		22			29	卌	5
99.5-109.5	12	19					III	3
109.5-119.5	7						I	1

आपने देखा कि सर्वाधिक मिलान दंडिकाएँ 5 हैं जो आकार 79.5–89.5 व 89.5–99.5 के ठीक सामने हैं। अतः यह दोनों ही भूयिष्ठक वर्ग हैं। अब भूयिष्ठक (Z या M_O) की गणना समान्तर माध्य एवं माध्यिका पर आधारित निम्न सूत्र से की जायेगीः–

$$Z \text{ या } M_O = 3\,M_d - 2\,\bar{X}$$

आप गणनायें करने पर पायेंगे कि समान्तर माध्य 80.14 एवं माध्यिका 83.84 ज्ञात हुई है। अतः

$$Z \text{ या } M_O = 3(83.84) - 2(80.14)$$
$$Z \text{ या } M_O = 251.52 - 160.28$$
$$Z \text{ या } M_O = 91.24$$

भूयिष्ठक के गुण और परिसीमाएँ–

गुण–

1. कुछ परिस्थितियों में, भूयिष्ठक एकमात्र माय है, जैसे गारमेंट्स का भूयिष्ठक आमाप, जूतों का भूयिष्ठक आमाप, भूयिष्ठक मजदूरी, बैंक के जमाकर्त्ता खातों में भूयिष्ठक शेष जमा राशि, इत्यादि।

2. यह गुणात्मक घटनाओं का वर्णन करने के लिए प्रयुक्त होता है। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए कि एक प्रिंटिंग प्रेस, पाँच छाप निकालता है, जिनका मूल्यांकन हम इस प्रकार करते हैं : अधिक तीव्र, तीव्र, तीव्र, अस्पष्ट और तीव्र; तो भूयिष्ठक मान होगा, तीव्र।

3. उपभोक्ता उत्पाद की वरीयता के लिए, भूयिष्ठक वरीयता ही, मानी जाती है (स्वीकार की जाती है)। एक रेस्तरां का मालिक, जिसने एक मिठाई में विशेषज्ञता प्राप्त की है, अपने सामान्य ग्राहकों की बहुलक वरीयता जानना चाह सकता है।

4. एक वैषम्य युक्त बंटन की स्थिति में, भूयिष्ठक अधिकतम संकेन्द्रण बिंदु का संकेतक होता है।

5. बाजार अनुसंधान में, इसका प्रयोग बड़ा ही लाभप्रद है।

6. यदि एक या एक से अधिक वर्ग विवृत–मुखी हों, तो भी भूयिष्ठक का प्रयोग कर सकते हैं।

परिसीमाएँ–

1. बहुधा, बंटन के लिए, कोई भूयिष्ठक मान विद्यमान ही नहीं होता। और जब एक से अधिक भूयिष्ठक होते हैं, तो यह एक निरर्थक माप सिद्ध होता है।

2. यह उच्चतर बीजगणितीय प्रतिपादन के अयोग्य है।

3. यह एक कुपरिभाषित माप है। अतः विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से, कुछ भिन्न परिणाम ही प्राप्त होते हैं।

4. यह समंकों के, सभी मदों पर आधारित नहीं होता।

5. वर्ग अंतरालों के आमाप का, भूयिष्ठक के मान पर, सार्थक रूप से प्रभाव पड़ता है।

6. यद्यपि भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जो सर्वाधिक बार उपस्थित होता हैं, परंतु इसकी आवृत्ति कुल आवृत्तियों के अधिकांश को निरूपित नहीं करती।

सारांश–

भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जिसके गिर्द अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता से अंकेन्द्रित होने का प्रयत्न करती हैं अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृकत समंकों, दोनों ही के लिए, इसका परिकलन किया जा सकता है। परंतु, अवर्गीकृत समंकों के लिए इसका उपयोग सीमित है।

असतत बंटन के लिए, भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जिसके गिर्द, मदें बड़ी तीव्रता से संकेन्द्रित हों। यदि अधिकतम आवृत्ति के वर्ग के समीप के दो या दो से अधिक वर्गों में, प्रायः मान संकेन्द्रित हों, तो भूयिष्ठक निर्धारित करना कठिन होता है। ऐसी स्थितियों में भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करने के लिए समूहन और विश्लेषण करते हैं।

सतत बंटन के लिए, भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करने के पश्चात् भूयिष्ठक का परिकलन, विभिन्न अंतर्वेशन सूत्रों द्वारा किया जाता है। ऐसे बंटन के लिए जहाँ आवृत्तियाँ एक समान दर से वर्धमान या ह्रासमान हों, भूयिष्ठक को, सरल नियमों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। यहां यह, भूयिष्ठक वर्ग की सीमाओं का समांतर माध्य होता है या उनका एक भारित समांतर माध्य। समान्य वैषम्य वाले बंटन के लिए, भूयिष्ठक एक आनुभविक सूत्र Z या $M_O = 3\ M_d - 2\ \bar{X}$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।

भूयिष्ठक ऐसी परिस्थितियों में, जैसे जूतों का भूयिष्ठक आमाप, गारमेन्ट्स का भूयिष्ठक आमाप, भूयिष्ठक मजदूरी, इत्यादि, ज्ञात करने में, बड़ा ही उपयोगी है। गुणात्मक घटनाओं के वर्णन के लिए भी इसका प्रयोग किया जाता हैं उपभोक्ता उत्पादों के लिए, उपभोक्ताओं की भूयिष्ठक वरीयता को संकेतित करने के लिए भी इसका प्रयोग

होता है। भूयष्ठिक की कुछ परिसीमाएँ भी हैं, जैसे उच्च बीजगणितीय प्रतिपादन के अयोग्य कुपरिभाषित प्रकृति, अस्तित्व न होना, एक से अधिक भूयिष्ठक का विद्यमान होना, इत्यादि।

रेखाचित्र द्वारा निर्धारण–

भूयिष्ठक का निर्धारण, एक रेखाचित्र द्वारा भी किया जा सकता है। इसके लिए, आयत चित्र की संरचना की जाती हैं, और फिर, अधिकतम ऊँचाई की आयत और उसके समीप की दो आयतों का प्रयोग किया जाता है।

भूयिष्ठक को रेखाचित्र में, आवृत्ति वक्र द्वारा स्थापित कर सकते हैं। इस उद्देश्य के लिए, 'आयत चित्र' का प्रयोग होता है। इसे 'हिस्टोग्राम' **(Histogram)** भी कहते हैं।

उदाहरण 21

निम्न समंकों से रेखाचित्र के माध्यम से भूयिष्ठक ज्ञात कीजियेः–

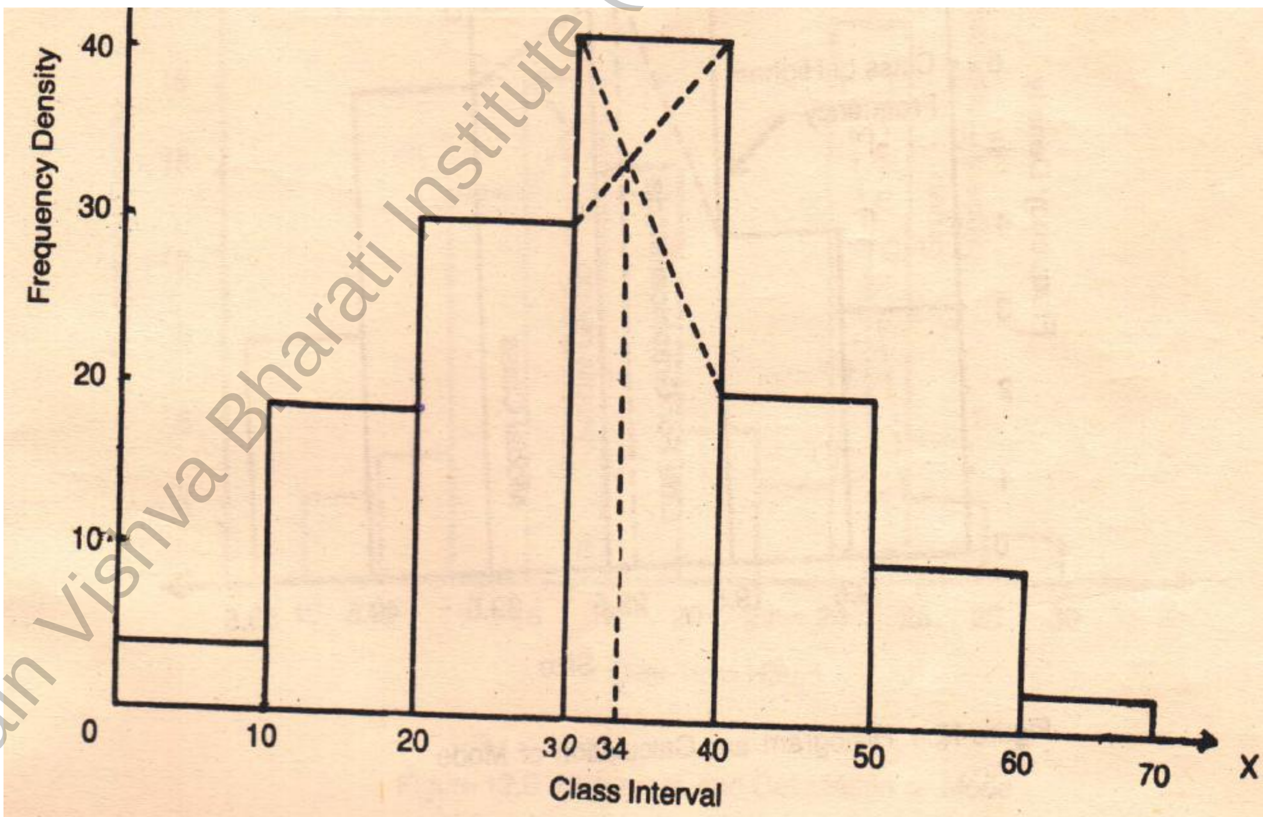
आकार	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
आवृत्ति	4	18	30	42	24	10	3

हलः

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 42 है जिसका भूयिष्ठक वर्ग 30–40 है। आप गणनायें करने पर पायेंगे कि भूयिष्ठक 34 ज्ञात हुआ है। अब इसे रेखाचित्र की सहायता से ज्ञात करते हैं। रेखाचित्र 'हिस्टोग्राम' **(Histogram)** भी यही पुष्टि कर रहा है।

अतः

$$Z \text{ या } M_0 = 34$$



अभ्यास प्रश्न 1 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
5	10	10	172
6	33	11	124
7	70	12	61
8	110	13	32
9	176	14	12
		योग	800

अभ्यास प्रश्न 2 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल	पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल
6	5	11	4
8	7	15	2
9	8	16	3
10	6	20	0
		25	1

अभ्यास प्रश्न 3 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-9	2	40-49	12	80-89	2

10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75-80	5	55-60	7	35-40	7
70-75	7	50-55	12	30-35	7
65-70	15	45-50	18	25-30	8
60-65	18	40-45	5	20-25	4

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांकों का प्रतिषत	विद्यार्थियों की संख्या
11-25	6
26-40	20
41-55	44
56-70	26
71-85	3
86-100	1

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

केन्द्रीय आकार	आवृत्ति	केन्द्रीय आकार	आवृत्ति
14	1	22	37
16	7	24	29
18	10	26	9
20	44	28	3

अभ्यास प्रश्न 8 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 9 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
80% से कम	100	40% से कम	32
70% से कम	90	30% से कम	20
60% से कम	80	20% से कम	13
50% से कम	60	10% से कम	5

अभ्यास प्रश्न 10 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या				
		120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

अभ्यास प्रश्न 11 निम्न समंकों से भूयिष्ठक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 से अधिक	250	50 से अधिक	155
10 से अधिक	225	60 से अधिक	125
20 से अधिक	210	70 से अधिक	60
30 से अधिक	190	80 से अधिक	10
40 से अधिक	175	90 से अधिक	0

(5) गुणोत्तर एवं हरात्मक माध्य **(Geometric & Harmonic Mean)**

उद्देश्य–

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य को परिभाषित कर सके और उनका परिकलन कर सकें।
- गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य की विशेषताओं का वर्णन कर सके।
- गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के उपयोगों और परिसीमाओं की व्याख्या कर सके।
- दी गई किसी परिस्थिति के लिए, उपयुक्त माध्य का चयन कर सकें।

प्रस्तावना–

जैसा कि आप जानते हैं माध्य निम्न प्रकार के होते हैं, गणितीय माध्य, स्थैतिक माध्य और विशेष माध्य। आप पहले ही, समांतर माध्य का अध्ययन कर चुके हैं, जो कि एक गणितीय माध्य है, और माध्यिका तथा भूयिष्ठक का, जो स्थैतिक माध्यों के वर्ग के हैं। अब आप दो अन्य गणितीय माध्यों, अर्थात् गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के बारे में पढ़ेंगे। दी गई परिस्थिति के लिए, एक ऐसे माध्य का चयन करना भी सीखेंगे जो सर्वाधिक उपयुक्त हो।

गुणोत्तर माध्य

उन परिस्थितियों में, जहाँ हमें ऐसी राशियों से व्यवहार करना पड़े जो एक काल अवधि में परिवर्तनशील हों, हमारी अभिरूचि यह ज्ञात करने में हो सकती है, कि उस राशि की माध्य परिवर्तन दर क्या है? ऐसी परिस्थितियों में सरल समांतर माध्य उपयुक्त नहीं होता और हमें गुणोत्तर माध्य की सहायता लेनी पड़ती है।

परिकलन–

अन्य माध्यों की भांति, गुणोत्तर माध्य की प्रक्रिया भी, अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंको के भिन्न होती हैं आइये, इन विधियों का अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक–

यदि समंक श्रेणी में केवल दो मदें हों, तो उन दो मदों के गुणनफल का वर्गमूल ही, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। यदि तीन मद हों तो इन तीन मदों के गुणनफल का घनमूल, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। इसी प्रकार यदि श्रेणी में, n मद हो तो इन n मदों के गुणनफल का n वाँ मूल, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। प्रतीकों में,

$$GM = \sqrt{ab} \text{ या } \sqrt{abc} \text{ या } \sqrt{abcd} \text{ या } \sqrt{abcd.....n}$$

उदाहरण के लिए मान लीजिए तीन संख्याएँ 4, 8 और 16 हैं तो इन तीन संख्याओं का गुणोत्तर माध्य होगा :

$$GM = \sqrt{abc}$$

$$GM = \sqrt{4X8X16}$$

$$GM = \sqrt{512}$$

$$GM = 8$$

जब मदों की संख्या तीन या तीन से अधिक हो, तो उनका गुणनफल ज्ञात करना और उसका मूल निकालना कठिन हो जाता है। इसलिए, लघुगणकों के प्रयोग से, परिकलन गणनाओं को सरल कर सकते हैं। प्रक्रिया निम्नानुसार है :

1. चर के विभिन्न मानों के लघुगणक ज्ञात कीजिए और उनका योगफल लीजिए। ($\sum$ Log x)

2. इस योगफल को, मदों की संख्या, N द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई संख्याओं को गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है।

$$GM = \text{Antilog}\left[\quad\right]$$

उदाहरण 22

20, 65, 83 एवं 135 का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजियेः—

हलः

x	Log x
20	1.3010
65	1.8129
83	1.9191
135	2.1303
N = 4	$\sum$ Log x = 7.1633

$$GM = \text{Antilog}\left[\quad\right]$$

$$GM = \text{Antilog}\left[\frac{7.1633}{4}\right]$$

$$GM = \text{Antilog } 1.7908$$

$$GM = 61.77$$

उदाहरण 23

किसी वस्तु की कीमत पहले वर्ष में 32 प्रतिषत, दूसरे वर्ष में 40 प्रतिषत व तीसरे वर्ष में 50 प्रतिषत बढ़ गयी। औसत वृद्धि दर ज्ञात करें।

हलः

चूंकि यहां राषियां समय के साथ परिवर्तनीय हैं, अतः समान्तर माध्य के स्थान पर गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना श्रेयस्कर होगा। प्रारंभिक कीमत 100 मानते हुए वास्तविक कीमतें क्रमषः 132, 140, 150 होंगी।

Price (x)	Log x
132	2.1206
140	2.1461
150	2.1761
N = 3	$\sum$ Log x = 6.4428

$$GM = \text{Antilog}\left[\quad\right]$$

$$GM = \text{Antilog}\left[\frac{6.4428}{3}\right]$$

$$GM = \text{Antilog } 2.1476$$

$$GM = 140.5$$

अतः औसत वृद्धि दर 140.5 – प्रारंभिक कीमत 100 = 40.5 प्रतिषत है।

वर्गीकृत समंक –

अवर्गीकृत समंकों के गुणोत्तर माध्य का परिकलन, कैसे करते हैं, यह आपने जान लिया है। अब हमें वर्गीकृत समंकों के लिए, प्रक्रिया की विवेचना करनी चाहिए। जैसा कि आप जानते हैं, वर्गीकृत समंक एक असतत श्रेणी या सतत श्रेणी के रूप में हो सकते हैं। इन दो प्रकार की श्रेणियों के लिए, हमें भिन्न प्रक्रियाएँ अपनानी होगी।

असतत श्रेणी–

यदि समंक वर्गीकृत हों, अर्थात् एक आवृत्ति बंटन के रूप हों, तो गुणोत्तर माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं–

1. चर के विभिन्न मानों के लघुगणक ज्ञात कीजिए (Log x)
2. इन लघुगणकों में आवृत्तियों की गुणा करके उनका योगफल लीजिए। ($\sum$ Log x . f)
3. इस योगफल को, मदों की संख्या, N अर्थात् $\sum f$ द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई श्रेणी को गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है।

$$GM = \text{Antilog}\left[\qquad\right]$$

उदाहरण 24

निम्न समंकों से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजियेः–

आकार	10	11	12	13	14	15
आवृत्ति	2	3	5	4	3	1

हलः

आकार (x)	आवृत्ति (f)	Log x	Log x . f
10	2	1.0000	2.0000
11	3	1.0414	3.1242
12	5	1.0792	5.3960
13	4	1.1139	4.4556
14	3	1.1461	3.4383
15	1	1.1761	1.1761
	$\sum f$ = 18		$\sum$ Log x . f = 19.5902

$$GM = \text{Antilog}\left[\quad\right]$$

$$GM = \text{Antilog}\left[\frac{19.5902}{18}\right]$$

GM = Antilog 1.0883

GM = 12.26

सतत श्रेणी–

यदि समंक सतत वर्गीकृत हों, अर्थात् एक आवृत्ति बंटन के रूप हों, तो गुणोत्तर माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं–

1. प्रत्येक वर्ग का माध्य मूल्य ज्ञात करते हैं। (Mid-value = m)
2. इन माध्य मूल्यों के लघुगणक ज्ञात कीजिए (Log m)
3. इन लघुगणकों में आवृत्तियों की गुणा करके उनका योगफल लीजिए। ($\sum$ Log m . f)
4. इस योगफल को, मदों की संख्या, N अर्थात् $\sum f$ द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई श्रेणी को गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है।

$$GM = \text{Antilog}\left[\quad\right]$$

उदाहरण 25

निम्न समंकों से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये:–

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
70 से अधिक	7
60 से अधिक	18
50 से अधिक	40
40 से अधिक	40
30 से अधिक	63
20 से अधिक	70

हलः

प्राप्तांक (x)	छात्रों की संख्या (f)	प्राप्तांक (x)	छात्रों की संख्या (f)	माध्य मूल्य (m)	Log m	Log m.f
70 से अधिक	7	70-80	7	75	1.8751	13.1257
60 से अधिक	18	60-70	11	65	1.8129	19.9419

50 से अधिक	40	50-60	22	55	1.7404	32.2888
40 से अधिक	40	40-50	0	45	1.6532	0
30 से अधिक	63	30-40	23	35	1.5441	35.5143
20 से अधिक	70	20-30	7	25	1.3979	9.7853
			$\sum f = 70$			$\sum$ Log m.f = 116.6560

$$GM = \text{Antilog} \left[\quad \right]$$

$$GM = \text{Antilog} \left[\frac{116.6560}{70}\right]$$

$$GM = \text{Antilog } 1.6665$$

$$GM = 46.39$$

भारित गुणोत्तर माध्य–

भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं–

1. प्रत्येक मूल्य के लघुगणक ज्ञात कीजिए (Log x)
2. इन लघुगणकों में भारों की गुणा करके उनका योगफल लीजिए। ($\sum$ Log x . w)
3. इस योगफल को, भारों के योग अर्थात् $\sum$w द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई श्रेणी का भारित गुणोत्तर माध्य होता है।

$$GM = \text{Antilog} \left[\quad \right]$$

उदाहरण 26

निम्न समंकों से भारित गुणोत्तर माध्य द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजियेः–

मद	भोजन	कपड़ा	मकान	षिक्षा	विविध
सूचकांक	352	220	230	160	190
भार	48	10	8	12	15

हलः

मद	सूचकांक (x)	भार (w)	Log x	Log x.w
भोजन	352	48	2.5465	122.2320
कपड़ा	220	10	2.3424	23.4240
मकान	230	8	2.3617	18.8936
षिक्षा	160	12	2.2041	26.4492

विविध	190	15	2.2788	34.1820
		$\sum w = 93$		$\sum \text{Log } x.w =$ 225.1808

$$GM = \text{Antilog} \left[\quad \right]$$

$$GM = \text{Antilog} \left[\frac{225.1808}{93}\right]$$

$$GM = \text{Antilog } 2.4213$$

$$GM = 263.8$$

अतः भारित औसत सूचकांक 263.8 है।

हरात्मक माध्य–

जैसा कि आप जानते है समंक प्रायः विभिन्न रूपों में होते हैं। दिए गए समंकों के लिए, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के प्रयोग की उपयुक्तता का निर्णय, बहुत अधिक इस बात पर निर्भर है कि समंक किस प्रकार से दिए गए है। उदाहरण के लिए, यदि कुल समय नियत हो और गति प्रति समय इकाई दी गई हो, तो औसत गति ज्ञात करने के लिए, हरात्मक माध्य, एक अधिक उपयुक्त माप हैं मान लीजिए, समंक प्रति घण्टे उत्पादित वस्तुओं के रूप में दिए हैं और हमारी अभिरूचि, औसत समय प्रति इकाई ज्ञात करने में हैं, तो हरात्मक माध्य ही उचित होगा।

परिकलन–

हरात्मक माध्य परिकलन की विधियाँ, अवर्गीकृत समंको और वर्गीकृत समंकों के लिए भिन्न है। आइये, इन विधियों का पृथक्–पृथक् अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक–

यदि समंक श्रेणी में केवल दो मदें हों, तो उन दो मदों के व्युत्क्रम के औसत का व्युत्क्रम ही, उनका हरात्मक माध्य होता है। इसी प्रकार श्रेणी में, n मदों के व्युत्क्रम के औसत का व्युत्क्रम ही, उनका हरात्मक माध्य होता है। प्रतीकों में,

$$HM = \text{Reciprocal} \left[\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots\frac{1}{n}}{N}\right] \quad \text{या} \quad HM = \left[\frac{1}{\left[\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ldots\ldots\frac{1}{n}}{N}\right]}\right]$$

उदाहरण के लिए मान लीजिए तीन संख्याएँ 4, 8 और 16 हैं तो इन तीन संख्याओं का हरात्मक माध्य होगा :

$$HM = \text{Reciprocal} \left[\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots\frac{1}{n}}{N}\right]$$

$$HM = \text{Reciprocal} \left[\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{3}\right]$$

$$HM = \text{Reciprocal} \left[\frac{0.25+0.125+0.0625}{3}\right]$$

$$HM = \text{Reciprocal} \left[\frac{0.4375}{3}\right]$$

$$HM = \text{Reciprocal } 0.1458 = 6.8587$$

इस प्रकार हरात्मक माध्य एक ऐसा माध्य है जो मदों के व्युत्क्रम पर आधारित है। इसके परिकलन व गणनाओं की सरल प्रक्रिया निम्नानुसार है :

1. चर के विभिन्न मानों के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए और उनका योगफल लीजिए। ($\sum$ Reci. x)
2. इस योगफल को, मदों की संख्या, N द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई संख्याओं को हरात्मक माध्य प्रदान करता है।

$$HM = \text{Reci.} \left| \quad \right|$$

उदाहरण 27

20, 65, 83 एवं 135 का हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये:–

हलः

x	Reci. x
20	0.05000
65	0.01538
83	0.01205
135	0.00701
N = 4	$\sum$ Reci. x = 0.08444

$$HM = \text{Reci.} \left[\quad \right]$$

$$HM = \text{Reci.} \left[\frac{0.08444}{4}\right]$$

$$HM = \text{Reci. } 0.0211$$

$$HM = \left(\frac{1}{0.0211}\right) = 47.37$$

उदाहरण 28

एक व्यक्ति किन्ही दो शहरों के बीच कार से यात्रा करता है। जाते समय उसकी गति 80 कि.मी. प्रति घंटा एवं वापसी में 100 कि.मी. प्रति घंटा रही। औसत गति ज्ञात करें।

हलः

चूंकि यहां गति समय के साथ परिवर्तनीय हैं, अतः समान्तर माध्य के स्थान पर हरात्मक माध्य ज्ञात करना श्रेयस्कर होगा।

गति (x)	Reci. x
80	1 / 80 = 0.0125
100	1 / 100 = 0.0100

N = 2	$\sum$ Reci. x = 0.0225

$$HM = Reci. \left[\quad\right]$$

$$HM = Reci. \left[\frac{0.0225}{2}\right]$$

$$HM = Reci.\ 0.01125$$

$$HM = \left(\frac{1}{0.01125}\right)$$

$$HM = 88.89$$

अतः कार की औसत गति 88.89 कि.मी. प्रति घंटा है।

वर्गीकृत समंक –

अवर्गीकृत समंकों के हरात्मक माध्य का परिकलन आपने जान लिया है। अब वर्गीकृत समंकों के लिए, जो एक असतत श्रेणी या सतत श्रेणी के रूप में हो सकते हैं, के लिए हमें भिन्न प्रक्रियाएँ अपनानी होगी।

असतत श्रेणी–

यदि समंक वर्गीकृत हों, अर्थात् एक आवृत्ति बंटन के रूप हों, तो हरात्मक माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं–

1. चर के विभिन्न मानों के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए (Reci. x)
2. इन व्युत्क्रमों में आवृत्तियों की गुणा करके उनका योगफल लीजिए।

   ($\sum$ Reci. x . f)
3. इस योगफल को, मदों की संख्या, N अर्थात् $\sum f$ द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई श्रेणी का हरात्मक माध्य होता है।

$$HM = Reci. \left[\quad\right]$$

उदाहरण 29

निम्न समंकों से हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये:–

आकार	20	25	30	40	50
आवृत्ति	10	15	25	30	20

हल:

आकार (x)	आवृत्ति (f)	Reci. x	Reci. x . f
20	10	0.05000	0.50000
25	15	0.04000	0.60000
30	25	0.03333	0.83325

40	30	0.02500	0.75000
50	20	0.02000	0.40000
	$\sum f$ = 100		$\sum$ Reci. x . f = 3.08325

$$HM = \text{Reci.} \left[\qquad \right]$$

$$HM = \text{Reci.} \left[\frac{3.08325}{100}\right]$$

$$HM = \text{Reci. } 0.0308325$$

$$HM = 32.43$$

सतत श्रेणी–

यदि समंक सतत वर्गीकृत हों, अर्थात् एक आवृत्ति बंटन के रूप हों, तो हरात्मक माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं–

1. प्रत्येक वर्ग का माध्य मूल्य ज्ञात करते हैं। (Mid-value = m)
2. इन माध्य मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए (Reci. m)
3. इन व्युत्क्रमों में आवृत्तियों की गुणा करके उनका योगफल लीजिए।

   ($\sum$ Reci. m . f)
4. इस योगफल को, मदों की संख्या, N अर्थात् $\sum f$ द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई श्रेणी को हरात्मक माध्य प्रदान करता है।

$$HM = \text{Reci.} \left[\qquad \right]$$

उदाहरण 30

निम्न समंकों से हरात्मक माध्य ज्ञात कीजियेः–

मजदूरी	मजदूरों की संख्या
0-50	10
50-100	15
100-150	17
150-200	8

हलः

मजदूरी (x)	मजदूरों की संख्या (f)	माध्य मूल्य (m)	Reci. m	Reci. m.f
0-50	10	25	0.04000	0.4000
50-100	15	75	0.01333	0.1995
100-150	17	125	0.00800	0.1360
150-200	8	175	0.00567	0.0456
	$\sum f$ = 50			$\sum$ Reci. m.f = 0.7811

$$HM = Reci. \left[\quad\quad\right]$$

$$HM = Reci. \left[\frac{0.7811}{50}\right]$$

$$HM = Reci.\ 0.0156$$

$$HM = 64.10$$

भारित हरात्मक माध्य–

भारित हरात्मक माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं–

1. प्रत्येक मूल्य के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए (Reci. x)
2. इन व्युत्क्रमों में भारों की गुणा करके उनका योगफल लीजिए। ($\sum$ Reci. x . w)
3. इस योगफल को, भारों के योग अर्थात् $\sum$w द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई श्रेणी का भारित हरात्मक माध्य होता है।

$$HM = Reci. \left[\quad\quad\right]$$

उदाहरण 31

एक व्यक्ति 200 कि.मी. कार से 80 कि.मी. प्रति घंटा की गति से यात्रा करता है। अगले 800 कि.मी. रेलगाड़ी से 50 कि.मी. प्रति घंटा की गति से एवं अगले 2000 कि.मी. हवाईजहाज से 200 कि.मी. प्रति घंटा की गति से यात्रा करता है। उसकी औसत गति ज्ञात करें।

हलः

साधन	गति (x)	भार (w)	Reci. x	Reci. x.w
कार	80	200	0.0125	2.5
रेलगाड़ी	50	800	0.02	16.0

हवाईजहाज	200	2000	0.005	10.0
		$\sum w = 3000$		$\sum \text{Log } x.w = 28.5$

$$HM = \text{Reci.} \left[\quad \right]$$

$$HM = \text{Reci.} \left[\frac{28.5}{3000} \right]$$

$$HM = \text{Reci. } 0.0095$$

$$HM = 105.26$$

अतः यात्रा की औसत गति 105.26 कि.मी. प्रति घंटा है।

एक उपयुक्त माध्य का चयन–

इस इकाई में हमने विभिन्न प्रकार के माध्यों, अर्थात् समांतर माध्य, भूयिष्ठक माध्यिका, गुणोत्तर माध्य, इत्यादि का अध्ययन किया है। हमने, इन माध्यों में से प्रत्येक के गुणों, दोषों और विशिष्ट उपयोगों का पृथक्–पृथक् अध्ययन किया हैं अब हमें यह ज्ञात होना चाहिए कि एक दिए गए प्रयोजन के लिए, एक उपयुक्त माध्य का चुनाव कैसे करें। केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक श्रेष्ठ माप के आवश्यक गुणों के दृष्टिकोण से जाँच करें तो समांतर माध्य ही सर्वोत्तम माध्य प्रतीत होता हैं, क्योंकि इसमें ये गुण सर्वाधिक संख्या में है। परंतु एक दी गई परिस्थिति के लिए उपयुक्त माध्य का चुनाव करना, एक समस्या प्रस्तुत कर देता है। यदि निर्णय उपयुक्त नहीं है, तो परिणाम अधिक विश्वसनीय नहीं होंगे। एक अनुपयुक्त माध्य का प्रयोग करने पर, जो तुलनात्मक दृश्य उभर कर आता है, वह यथार्थ से कहीं दूर होगा। इसलिए, एक माध्य का चुनाव करते समय, आपको निम्न पहलुओं को ध्यान में रखना चाहिए :

1. प्रयोजन : किसी माध्य का चुनाव उस प्रयोजन के अनुकूल होना चाहिए, जिसकी पूर्ति के लिए, उस माध्य को अभिकल्पित किया गया है। यदि प्रयोजन, श्रेणी के सभी मदों को समान महत्व देना हो, तो समांतर माध्य एक उचित माध्य होगा। यदि प्रयोजन, सामान्यतम या सर्वाधिक प्रचलित मद ज्ञात करने का हो तो भूयिष्ठक एक उपयुक्त माध्य होगा। यदि प्रयोजन, एक निर्दिष्ट सापेक्ष स्थिति के मद को स्थापित करना हो, तो माध्यिका इस प्रयोजन को पूरा कर सकेगी। जब बड़े मदों की अपेक्षा, छोटे मदों को अधिक महत्व देना तो गुणोत्तर माध्य का चुनाव करना होगा। यदि छोटे मानों को, पर्याप्त रूप में अधिक महत्व देना हो, तो हरात्मक माध्य का प्रयोग करना चाहिए।
2. समंक कुलक की प्रकृति और रूप : यदि बंटन वैषम्य युक्त हों, तो बहुलक या माध्यिका अधिमान्य होगा। विवृत मुखी बंटन के लिए भी, भूयिष्ठक या माध्यिका अधिक उपयुक्त होगी। J रूप के या व्युत्क्रम J रूप के बंटन में, अर्थात् ऐसे बंटन में जो सममिति से बहुत अधिक विचलति हो, माध्यिका ही, सर्वाधिक महत्वपूर्ण माध्य है। इसके दो उदाहरण हैं, मूल्य बंटन और आय बंटन। यदि समंक समता से फैले हो, और उनमें बहुत अधिक विचरण न हो, तो समांतर माएय, एक उपयुक्त माध्य होगा। इसका एक उदाहरण है, औसत उत्पादन लागत। जब अनुपातों या प्रतिशतताओं की औसत निकालनी हो तो गुणोत्तर माध्य ही सर्वाधिक उपयुक्त माप है। ऐसे समंक कुलक के लिए जिसमें, एक चर के मानो की तुलना, एक अन्य चर से की जाए, जिसका मान नियत हो, तो हरात्मक माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है। इसके उदाहरण है : परिवर्ती गति जब दूरी नियत हो, और परिवर्ती दर (अर्थात् राशि प्रति रू.) जब कुल राशि नियत हो, इत्यादि।

3. बीजगणितीय प्रतिपादन के लिए आवश्यकता : यदि एक माध्य पर, आगे बीजगणितीय प्रतिपादन अभीष्ट हो, तो समांतर माध्य को ही सर्वोत्तम मानते हैं, क्योंकि इसका बहुत अधिक प्रयोग होता है।

4. गुणात्मक घटनाएँ : ऐसे लक्षणों के लिए, जो गुणात्मक प्रकृति के हों, जैसे ईमानदारी, सौंदर्य, प्रज्ञा, इत्यादि, माध्यिका ही एक उपयुक्त माध्य प्रतीत होती है।

5. विशेष प्रयोजन : काल श्रेणी के विश्लेषण में उपनति का परिकलन करने के लिए, चल माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य होगा।

यद्यपि उपरोक्त विचार, एक उपयुक्त माध्य का चुनाव करने में, एक सदर्शक नियम की भूमिका निभाते हैं, फिर भी बहुत सी परिस्थितियों में, यह निर्णय स्वेच्छ होता हे। यदि परिकल्पना को सिद्ध करने के लिए माध्य के उच्चतर मान की आवश्यकता हो, तो हम ऐसे माध्य का चुनाव करने के लिए प्रलोभित होते हैं, जो उच्चतर मान प्रदान करें। क्योंकि हम, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का चुनाव अपनी रूचि के अनुसार कर सकते हैं, इसलिए ऐसे माध्य के चुनाव की संभावना है, जो वही परिणाम प्रदान करें, जो हमें अभीष्ट हों। परंतु, जब माध्य का प्रयोग, असतर्कता और अक्षमता से किया जाए, तो इसमें प्रयोक्ता का ही दोष होता है, उपकरण का नहीं

सारांश–

केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुछ अन्य माप भी है, जैसे, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य, जिनका प्रयोग विशिष्ट परिस्थितियों में करते हैं। अनुपापों और प्रतिशतताओं के माध्यम के लिए गुणोत्तार माध्य का प्रयोग करते हैं। यदि एक श्रेणी में N मद हों, तो उसका गुणोत्तर माध्य, इन मदों के गुणनफल का N वाँ मूल होता है। जब मदों की संख्या अधिक हो, तो परिकलन को सुगम बनाने के लिए, गुणोत्तर माध्य का लघुगणक लेते हैं। अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों दोनों के लिए, तथा असतत और सतत श्रेणियों के लिए भी, विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से, गुणोत्तर माध्य का परिकलन कर सकते हैं।

किसी दी गई काल अवधि में, एक चर के मान में औसत वृद्धि दर परिकलित करने के लिए, गुणोत्तर माध्य का बहुत अधिक प्रयोग होता है। भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन भी कर सकते हैं, जिसका प्रयोग सूचकाकों की संरचना में किया जाता है। गुणोत्तर माध्य के कुछ ऐसे गणितीय विशेष गुण है। जो अनुपातों और प्रतिशतताओं का औसत निकालने में, इसके प्रयोग को अधिक महत्वपूर्ण बना देते हैं, इसकी कुछ परिसीमाएँ भी हैं। यदि एक भी मद का मान, शून्य या ऋणात्मक हो तो गुणोत्तर माध्य का अस्तित्व नहीं होता। ऐसे समंक कुलकों के लिए, जिनमें एक चर के मानों की तुलना, नियत मान के एक अन्य चर से की जाए, हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, गति, समय और दूरी से सम्बद्ध अनुपातों और प्रतिशतताओं का औसत जाननते के लिए, हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। यह व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है। इसका परिकलन, अवर्गीकृत और वर्गीकृत समंकों तथा असतत और सतत श्रेणियों के लिए कर सकते हैं। भारित गुणोत्तर माध्य के सदृश, भारित हरात्मक माध्य का परिकलन भी कर सकते हैं। ऐसी परिस्थितियाँ भी हैं, जहाँ हरात्मक माध्य और समांतर माध्य में किसी एक का, उपयुक्त माध्य के रूप में चुनाव करना कठिन होता है। यदि अनुपात, x इकाइयाँ प्रति y रूप में हों तथा x के मान निर्दिष्ट हों तो हरात्मक माध्य का, और यदि ल के मान निर्दिष्ट हों तो समांतर माध्य का प्रयोग करते हैं।

एक उपयुक्त माध्य का निर्णय, उस प्रयोजन पर निर्भर करता है जिसकी पूर्ति के लिए वह माध्य अभिकल्पित है, जैसे समंक समूह की प्रकृति और रूप इसका आगे बीजगणितीय विश्लेषण के लिए अवश्य होना इत्यादि। परंतु केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का प्रयोग, बड़ी सर्तकता और क्षमता से करना चाहिए।

स्वपरख प्रश्न / अभ्यास–

प्रश्न–

1. समांतर माधय, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं को दिखाने के लिए, उनकी तुलना कीजिए।

2. आप, केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक उपयुक्त माप का निर्णय, कैसे करते हो?

अभ्यास–

1. एक फैक्टरी के उत्पादन की वार्षिक वृद्धि दर, पिछले पाँच वर्षों में क्रमशः 5.0, 7.5, 5.0, 2.5 और 10 प्रतिशत रही है। इस अवधि के लिए उत्पादन का वार्षिक प्रतिशत चक्रवृद्धि दर क्या होगी?

2. 8 मदों का गुणोत्तर माध्य 3 है और 12 मदों का गुणोत्तर माध्य, 11 है। सभी 20 मदों का गुणोत्तर माध्य क्या होगा।

3. निम्न आंकड़ों के लिए, हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए :

   (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

   (2) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9

4. आप एक यात्रा करते हैं, जिसमें आपको, 900 किमी. रेलगाड़ी से 60 किमी. प्रतिघण्टा की औसत गति से, 3000 किमी. नाव से 25 किमी. प्रतिघण्टा की औसत गति से, 4000 किमी. वायुयान से 350 किमी. प्रतिघण्टा की औसत गति से यात्रा करनी होती है। यात्रा की औसत गति ज्ञात कीजिये।

खण्ड 'ब'

अपकिरण एवं विषमता के माप

यूनिट 1

अपकिरण (Dispersion)

उद्देश्य–

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो जाएँगे कि आप :

- अपकिरण की संकल्पना और उसे मापने के महत्व की व्याख्या कर सकेंगे।
- विचरण की निरपेक्ष और सापेक्ष मापों के भेद कर सकेंगे।
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए अपकिरण की कुछ मापों, जैसे विस्तार, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन को परिकलित कर सकेंगे।
- विभिन्न परिस्थितियों में अपकिरण की उपयुक्त माप के प्रयोग का निर्णय ले सकेंगे।

प्रस्तावना–

पिछली इकाई में आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों का अध्ययन किया है। परंतु समंकों का विश्लेषण करने के लिए, केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति ही पर्याप्त नही है। समंकों के अधिक सार्थक विश्लेषण के लिए, अपकिरण अर्थात् समंकों के विस्तार या केन्द्रीय वृत्ति से मदों के विचलन की मात्रा का अध्ययन करना भी आवश्यक है। इस इकाई में, आप, अपकिरण के अर्थ और उसके महत्व का अध्ययन करेंगे। आप अपकिरण की तीन मापों, अर्थात् विस्तार, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन के बारे में भी विस्तार से पढ़ेंगे।

अपकिरण किसे कहते हैं ?

'अपकिरण' शब्द का प्रयोग समंकों की विषमांगता की मात्रा को प्रकट करने के लिए किया जाता हैं। यह समंकों का एक महत्वपूर्ण लक्षण है, जो प्रेक्षणों की परस्पर विविधता की मात्रा को निर्दिष्ट करता है। अपकिरण की माप केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर व्यक्तिगत मानों के विस्तार या बिखराव का वर्णन करता है। अपकिरण की संकल्पना को स्पष्टतः समझने के लिए उदाहरण 1 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 1

तीन विभिन्न फर्मो की दैनिक बिक्री (रूपयों में)

फर्म A	फर्म B	फर्म C
60000	62500	51000
60000	60000	32000
60000	52250	22000
60000	56500	18000
60000	60500	27000
60000	68250	210000

$\bar{X}_A = 60000$ $\bar{X}_B = 60000$ $\bar{X}_C = 60000$

क्योंकि तीनों फर्मो A, B और C की, औसत दैनिक बिक्री, अभिन्न है, यह निष्कर्ष निकालने की संभावना हो सकती है कि दैनिक बिक्री के ये तीनों बंटन एक जैसे है। परंतु ध्यान दीजिए कि प्रत्येक फर्म की बिक्री का विचरण प्रत्येक अन्य फर्म की विक्री के विचरण से भिन्न है। फर्म A की स्थिति में सभी दिनों में बिक्री समान है। फर्म B की स्थिति में दैनिक ब्रिक्री में कुछ विचरण है। परंतु फर्म C की स्थिति में विचरण की मात्रा बहुत अधिक है। यहाँ यद्यपि तीनों समंक कुलकों के समांतर माध्य अभिन्न है, फिर भी मदों के बिखराब के विचार से वे भिन्न हैं। अतः विभिन्न समंक कुलकों के समान केन्द्रीय माप होते हुए भी वे मदों के विस्तार या बिखराव, अर्थात् अपकिरण के विचार से विभिन्न हो सकते हैं।

अपकिरण शब्द की व्याख्या एक अन्य अभिप्राय से भी कर सकते हैं। जब समंकों के सभी मद केन्द्रीय प्रवृत्ति के समान न हों तो प्रत्येक मद का केन्द्रीय प्रवृत्ति से अंतर (विचलन) एक निश्चित राशि होगा। अपकिरण यह निर्दिष्ट करता है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों का औसत अंतर कितना है। ध्यान दीजिए कि फर्म B की स्थिति में व्यक्तिगत मदों की माध्य बिक्री (अर्थात 60000) से विचलन फर्म C के विचलनों की अपेक्षा बहुत कम हैं, इससे अभिप्राय है कि फर्म C की तुलना में फर्म B का माध्य बिक्री से विचलनों का औसत बहुत कम है। दूसरे शब्दों में फर्म C की तुलना में फर्म B की दैनिक बिक्री का अपकिरण बहुत कम है।

अपकिरण मापने का महत्व–

विचरण (अपकिरण) की मापों का परिकलन निम्न प्रयोजनों से किया जाता है :

1. विचरण (अपकिरण) मापन, यह निर्दिष्ट करके कि माध्य किस सीमा तक सभी समंकों का प्रतिनिधित्व करता है, माध्य की विश्वसनीयता को निर्धारित करता है। पहले चर्चा किए गए उदाहरण 1 में फर्म A की स्थिति में माध्य दैनिक बिक्री 60000 रू. है, जो कि दैनिक बिक्री समंकों का आदर्श प्रतिनिधि है। फर्म B की स्थिति में विचरण बहुत कम है, क्योंकि माध्य दैनिक बिक्री विभिन्न दिनों की बिक्री के आंकड़ों के सर्वथा निकट है। इसलिए इस स्थिति में माध्य दैनिक बिक्री को विभिन्न दिनों के बिक्री आंकड़ों का प्रतिनिधि मान सकते हैं। किंतु फर्म C की स्थिति में व्यक्तिगत आंकड़ों का विचरण बहुत अधिक है, इसलिए माध्य मान 60000 रू. को सभी उच्च और निम्न आंकड़ों का, जैसे 210000 रू. और 10000 रू. का प्रतिनिधि नहीं मान सकते।
2. अपकिरण की माप दो या दो से अधिक बंटनों की, विचरण के विचार से, तुलना करने में सहायक होती है।
3. विचरण मापन का एक अन्य प्रयोजन विचरण की प्रकृति और उसके कारण को ज्ञात करना है ताकि स्वयं विचरण पर नियंत्रण किया जा सके।
4. विचरण मापन अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे सहसम्बन्ध, समाश्रयण सांख्यिकीय अनुमान इत्यादि के प्रयोग को सुगम बना देना है।

अपकिरण के अच्छे माप की विशेषताएँ–

जैसा कि आप जानते हैं, अपकिरण की माप मदों के उनके अपने माध्य से विचलनों का माध्य होती है, अर्थात् यह एक दूसरी कोटि का माध्य होता है। अतः इसमें वे सभी विशेषताएँ होनी चाहिए जो माध्य के एक अच्छी माप से अपेक्षित है। यूले और केण्डाल के अनुसार अपकिरण की एक अच्छे माप की विशेषताएँ निम्नलिखित हैः–

1. सांख्यिकीय मापों का प्रयोग एक साधारण व्यक्ति द्वारा भी किया जाता है। इसलिए जटिल परिभाषाएँ और परिकलन विधियाँ वांछनीय नहीं है। यह समझने में सुगम तथा परिकलन में सरल होना चाहिए।
2. यह दृढ़ता से परिभाषित होना चाहिए ताकि एक ही समंक समूह के लिए सभी विधियाँ अभिन्न परिणाम प्रदान करें। विभिन्न विधियाँ विभिन्न परिणाम प्रदान करें यह उचित नहीं है।

3. यह सभी मदों पर आधारित होना चाहिए। यदि यह सभी मदों पर आधारित होगा तो इसके द्वारा प्रस्तुत परिणाम एक श्रेष्टतर प्रतिनिधि मान होगा। अतः अपकिरण की एक अच्छी माप को समस्त समंकों पर आधारित होना चाहिए।

4. यह और अधिक बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना चाहिए। इससे अभिप्राय यह है कि दो परिणामों को संयुक्त करना, अशुद्ध प्रविष्टियों के लिए, परिणाम को समंजित करना, छूटे हुए मानों को आंकिलत करना आदि सभी मदों के यथार्थ मानों के ज्ञात न होने पर भी सम्भव होना चाहिए।

5. इसमें प्रतिचयन स्थिरता होनी चाहिए। इससे यह अभिप्राय है कि प्रतिदर्श से प्राप्त परिणामों और समष्टि से प्राप्त संगत परिणामों का माध्य अंतर न्यूनतम होना चाहिए। यदि अपकिरण की किसी माप में यह विशेषता हो तो वह सर्वोत्तम माप होगा।

6. यह चरम मानों से अत्यधिक प्रभावित नहीं होना चाहिए। बहुधा चरम मान समंकों के यथार्थ प्रतिनिधि नहीं होते। अतः उनकी उपस्थिति से परिकलन पर अत्याधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए।

यह सूची अपकिरण के एक अच्छे माप की अपेक्षित विशेषताओं की पूर्ण सूची नहीं है। परंतु अपकिरण की एक अच्छे माप के ये सर्वाधिक महत्वपूर्ण लक्षण है।

अपकिरण की निरपेक्ष और सापेक्ष माप–

अपकिरण की ऐसी माप को जो समंकों की मूल इकाई के पदों में प्रकट किया जाए निरपेक्ष माप कहते हैं। उदाहरण के लिए पहले चर्चा किये गए उदाहरण 1 में फर्म ठ की दैनिक बिक्री का विचरण 52250 रू. से 68250 रू. तक है। इसलिए समंकों का विस्तार 68250 रू. – 52250 रू. या 16000 रू. की कोटि का है। यह बिक्री के विस्तार की निरपेक्ष माप हैं यदि दो या दो से अधिक बंटन या श्रेणियाँ विभिन्न इकाइयों में व्यक्त हों तो उनके विचरण की तुलना के लिए समंकों की इकाइयों में व्यक्त ऐसे निरपेक्ष माप उपयुक्त नहीं होते।

इसके विपरीत अपकिरण के सापेक्ष माप अनुपात या प्रतिशतता के रूप में प्राप्त किए जाते हैं इसलिए प्रत्येक सापेक्ष माप समंकों की माप इकाई से स्वतंत्र एक संख्या होती है। सापेक्ष अपकिरण की माप अपकिरण के एक निरपेक्ष माप का किसी उपयुक्त माध्य से या समंकों के एक चुने हुए मद से अनुपात होती है। इसलिए इसे अपकिरण गुणांक भी कहते हैं। उदाहरण के लिए पहले चर्चा किए गए उदाहरण 1 में यदि बिक्री विस्तार, 16000 रू. को बिक्री माध्य 60000 रू. के अनुपात के रूप में प्रकट करें अर्थात् 16000 / 60000 रूप में, तो यह बिक्री विस्तार का एक सापेक्ष माप बन जाता हे। यह मान एक शुद्ध संख्या है, और इसमें कोई विशिष्ट माप इकाई नहीं होती। इसी प्रकार, विस्तार 16000 रू. को, दो चरम मानों के योग के अनुपात के रूप में (अर्थात् 16000 / 52250 + 68250 के रूप में) भी, प्रकट कर सकते हैं। यह भी बिक्री विस्तार का एक सापेक्ष माप प्रदान करता है। कुछ परिस्थितियों में, यद्यपि समंक एक समान इकाइयों में व्यक्त हैं, तथापि निरपेक्ष मापों द्वारा, उनके विचरण की तुलना निरर्थक होती है। दिल्ली से बम्बई की दूरी मापन में, 1 किमी. (100000सेमी.) के विचरण की भी कोई सार्थकता नहीं है। परंतु 1.40 मीटर के एक कपड़े के टुकड़े की लम्बाई मापने में, 10 सेमी. के विचरण की भी बहुत अधिक सार्थकता है। अतः जब भी दो समंक समूहों में विचरण की तुलना करनी अभीष्ट हो तो यह तुलना सदैव सापेक्ष माप के पदों में की जाती है।

अपकिरण की माप–

प्रायः प्रयुक्त होने वाले अपकिरण के निरपेक्ष माप निम्न है :

1. **समंकों के चुने हुए मदों पर आधारित**
    1. विस्तार, समस्त आंकड़ों का विस्तार।
    2. अंतर–चतुर्थक विस्तार, मध्य के 50 प्रतिशत समंकों का विस्तार।

सामान्यतः इसके स्थान पर चतुर्थक विचलन का अधिक प्रयोग करते हैं जो अंतर–चतुर्थक विस्तार का आधा होता है।

2. **समंकों के सभी मदों पर आधारित**

1. माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी निर्दिष्टि माप से निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य।
2. मानक विचलन या समांतर माध्य से विचल–वर्ग–माध्य–मूल।
3. आरेखीय विधि : लारेज चक्र

अपकिरण के निरपेक्ष मापों के संगत अपकिरण के सापेक्ष माप इस प्रकार है :

अपकिरण के निरपेक्ष माप	अपकिरण के सापेक्ष माप
1. विस्तार	विस्तार गुणांक
2. चतुर्थक विचलन	चतुर्थक विचलन गुणांक
3. माध्य विचलन	माध्य विचलन गुणांक
4. मानक विचलन	मानक विचलन गुणांक

मानक विचलन गुणांक को प्रतिशत के रूप में प्रकट करने पर, उसे विचरण गुणांक कहते हैं। अब इनका विस्तृत अध्ययन करें।

(1) विस्तार **(Range)** –

एक समंक कुलक के उच्चतम (संख्यात्मक रूप में अधिकतम) मान और निम्नतम (संख्यात्मक रूप में न्यूनतम) मान के अंतर को विस्तार कहते हैं।

$$R = X_{max} - X_{min}$$

जहाँ,

X_{max} = उच्चतम मान

X_{mln} = निम्नतम मान

उदाहरण 2

जिसकी चर्चा हम पहले कर चुके हैं, तीनों फर्मों के दैनिक बिक्री आंकड़ो पर विचार कीजिए और विस्तार परिकलित कीजिए।

हल

फर्म ए के लिए, विस्तार = 60000–60000 = 0

फर्म बी के लिए, विस्तार = 68250–52250=16000

फर्म सी के लिए, विस्तार = 210000–18000=192000

विस्तार के मान का स्पष्टीकरण बहुत सरल है। इस उदाहरण में फर्म ए की स्थिति में, दैनिक बिक्री का विचरण शून्य है। फर्म बी की स्थिति में विचरण कम है और फर्म सी की स्थिति में, विचरण बहुत अधिक है।

वर्गीकृत समंकों के लिए, उच्चतम वर्ग की ऊपरी सीमा और न्यूनतम वर्ग की निम्न सीमा के अंतर को सन्निकटतः विस्तार परिभाषित करते हैं।

विस्तार के संगत सापेक्ष माप को विस्तार गुणांक कहते हैं, जिसे प्राप्त करने के लिए विस्तार को चरम मानों के योग के अनुपात के रूप में व्यक्त करते हैं। यहाँ हम विस्तार को माध्य के अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं करते क्योंकि विस्तार माध्य पर आश्रित नहीं होता। यह आंकड़ों के केवल दो चुने हुए मदों से ही संबंधित होतो है। अतः विस्तार गुणांक को निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है :

$$\text{विस्तार गुणांक Coefficient of Range} = (X_{max} - X_{min}) / (X_{max} + X_{min})$$

उदाहरण 3

निम्न आंकड़ों से विस्तार गुणांक का परिकलन कीजिए :

बिक्री (लाखों रूपयों में)	दिनों की संख्या
30-40	12
40-50	18
50-60	20
60-70	19
70-80	13
80-90	8

हल :

$$R = X_{max} - X_{min} = 90\text{-}30 = 60 \text{ लाख रु.}$$

$$\text{Coefficient of Range} = (X_{max} - X_{min}) / (X_{max} + X_{min})$$

$$= (90 - 30) / (90 + 30)$$

$$= 60/120 = 0.5$$

विस्तार का परिकलन बहुत ही सरल है और इससे आंकड़ों के विचरण के बारे में कुछ अनुमान मिल जाता है। क्योंकि विस्तार के परिकलन में केवल दो चरम मानों का ही प्रयोग होता है, इसलिए यह विचरण का एक अशोधित माप है।

विस्तार की संकल्पना का सांख्यिकीय गुण नियंत्रण में बहुत अधिक प्रयोग होता है। शेयर, डिबेंचर और कृषि मूल्यों जैसी उन वस्तुओं के विचरण के अध्ययन में विस्तार बड़ा सहायक होता है जो मूल्य परिवर्तनों के लिए बड़े ही सुग्राही है। मौसम के पूर्व अनुमान के लिए विस्तार एक अच्छा सूचक हैं। उदाहरण के लिए, दूरदर्शन के मौसम पूर्वानुमानों में।

अभ्यास प्रश्न 1 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक
1041	87	1046	47	1051	69
1042	38	1047	15	1052	55
1043	52	1048	28	1053	24

1044	75	1049	80	1054	36
1045	63	1050	71	1055	38

अभ्यास प्रश्न 2 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि
जनवरी	10000	मई	.8000	सितंबर	4000
फरवरी	18000	जून	100	अक्तूबर	8000
मार्च	0	जुलाई	400	नवंबर	12000
अप्रेल	.2500	अगस्त	1000	दिसंबर	20000

अभ्यास प्रश्न 3 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	10	172
5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12
9	176	योग	800

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल	पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल
6	5	11	4
8	7	15	2
9	8	16	3
10	6	20	0
		25	1

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0—10	10	40.50	12
20—30	20	50.60	8
20—30	30	60.70	5
30—40	15	ज्वजंस	100

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0—9	2	40.49	12	80.89	2
10—19	3	50.59	8	90.99	1
20—29	6	60.69	5	योग	50
30—39	8	70.79	3		

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75—80	5	55.60	7	35.40	7
70—75	7	50.55	12	30.35	7
65—70	15	45.50	18	25.30	8
60—65	18	40.45	5	20.25	4

अभ्यास प्रश्न 8 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

तापमान ^{O}C	दिनों की संख्या	-10 to 0	42
-40 to -30	10	0 to 10	65
-30 to -20	28	10 to 20	180
-20 to -10	30	20 to 30	10

अभ्यास प्रश्न 9 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांकों का प्रतिषत	विद्यार्थियों की संख्या

11-25	6
26-40	20
41-55	44
56-70	26
71-85	3
86-100	1

अभ्यास प्रश्न 10 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या
0-5	2	10-13	10	16-19	4
5-7	3	13-15	5	19-20	3
7-9	4	15-16	3	20-25	5
9-10	2				

अभ्यास प्रश्न 11 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-5	2	45-65	22
5-15	8	65-85	18
15-25	12	85-150	9
25-45	25	150-300	4

अभ्यास प्रश्न 12 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

केन्द्रीय आकार	आवृत्ति	केन्द्रीय आकार	आवृत्ति
14	1	22	37
16	7	24	29
18	10	26	9
20	44	28	3

अभ्यास प्रश्न 13 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 14 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
80% से कम	100	40% से कम	32
70% से कम	90	30% से कम	20
60% से कम	80	20% से कम	13
50% से कम	60	10% से कम	5

अभ्यास प्रश्न 15 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या	120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

अभ्यास प्रश्न 16 निम्न समंकों से विस्तार एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 से अधिक	250	50 से अधिक	155
10 से अधिक	225	60 से अधिक	125
20 से अधिक	210	70 से अधिक	60
30 से अधिक	190	80 से अधिक	10
40 से अधिक	175	90 से अधिक	0

(2) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation or QD) –

पहले और तीसरे चतुर्थकों के अंतर के आधे को चतुर्थक विचलन परिभाषित करते हैं। चतुर्थकों के परिकलन की विधियों का अध्ययन आप पहले ही कर चुके हैं।

$$\text{चतुर्थक विचलन } Q.D. = (Q_3 - Q_1) / 2$$

जहाँ Q_1 पहला चतुर्थक है और Q_3 तीसरा चतुर्थक। क्योंकि Q_1 और Q_3 का अंतर दोनों चतुर्थकों के बीच की दूरी को निरूपित करता है, इसलिए इस अंतर को अंतर चतुर्थक विस्तार भी कह सकते हैं, तथा चतुर्थक विचलन को अर्द्ध अंतर–चतुर्थक विस्तार कह सकते हैं।

चतुर्थक विचलन (QD) दो सम्बद्ध चतुर्थकों पर आश्रित है और उच्चतम 25 प्रतिशत तथा निम्नतम 25 प्रतिशत प्रेक्षणों की उपेक्षा करता है, इसलिए यह चरम मानों से निष्प्रभावित रहता है। चतुर्थक विचलन का एक अन्य गुण यह है कि यह विचरण की एक मात्र ऐसी माप है, जिसे विवृत मुखी बंटन के लिए प्रयोग कर सकते है। चतुर्थक विचलन की मुख्य सीमा यह है कि यह सभी प्रेक्षणों के मानों पर आधारित नहीं होता। यह केवल मध्य के 50 प्रतिशत प्रेक्षणों पर आधारित होता है।

चतुर्थक विचलन पर आधारित, अपकिरण के सापेक्ष माप को चतुर्थक विचलन गुणांक कहते है। चुतर्थक विचलन गुणांक को निम्नानुसार ज्ञात करेंगे

चतुर्थक विचलन गुणांक Coefficient of QD = $(Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1)$

उदाहरण 4

निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

90, 95, 100, 102, 120, 125, 154, 164, 175, 180, 200, 210 एवं 250

हलः

कुल प्रेक्षणों की संख्या (N) 13 है और यह श्रेणी पहले से ही आरोही क्रम में व्यवस्थित है, अतः सीधे ही चतुर्थकों की गणना करेंगेः

प्रथम चतुर्थक

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{13+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{14}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } 3.5^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = \text{Size of } 3^{rd} \text{ item} + .5 \text{ of difference between } 3^{rd} \text{ and } 4^{th} \text{ item}$$

$$Q_1 = 100 + .5 \text{ of } (102-100)$$

$$Q_1 = 100 + .5 \text{ of } 2$$

$$Q_1 = 100 + 1 = 101$$

इसी प्रकार **तृतीय चतुर्थक**

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{13+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \left(\frac{42}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 10.5^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } 10^{th} \text{ item} + .5 \text{ of difference between } 10^{th} \text{ and } 11^{th} \text{ item}$$

$$Q_3 = 180 + .5 \text{ of } (200\text{-}180)$$

$$Q_3 = 180 + .5 \text{ of } 20$$

$$Q_3 = 180 + 10 = 190$$

अब **चतुर्थक विचलन**

$$Q.D. = (Q_3 - Q_1) / 2$$

$$Q.D. = (190 - 101) / 2$$

$$Q.D. = 89 / 2 = 44.5$$

और अब **चतुर्थक विचलन का गुणांक**

$$\text{Coefficient of QD} = (Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1)$$

$$\text{Coefficient of QD} = (190 - 101) / (190 + 101)$$

$$\text{Coefficient of QD} = 89 / 291$$

$$\text{Coefficient of QD} = 0.3058$$

उदाहरण 5

निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक (से कम)	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या	4	16	40	76	96	112	120	125

हलः

चूंकि श्रेणी 'से कम' रुप में है, अतः उसे पहले साधारण वर्गान्तरों में बदला जायेगा—

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)	प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)
10 से कम	4	0-10	4
20 से कम	16	10-20	16-4=12
30 से कम	40	20-30	40-16=24

40 से कम	76	30-40	76-40=36
50 से कम	96	40-50	96-76=20
60 से कम	112	50-60	112-96=16
70 से कम	120	60-70	120-112=8
80 से कम	125	70-80	125-120=5
			$\sum f$ = 125

यदि श्रेणी 'से कम' रुप में होती है, तो आवृत्तियां स्वतः संचयी आवृत्तियों के रुप में होती हैं। जैसा कि उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है। अतः अब सीधे ही चतुर्थकों की गणना करेंगे:

प्रथम चतुर्थक

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{125}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_1 = \text{Size of } 31.25^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 40 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी का आकार अर्थात् 20–30 प्रथम चतुर्थक वर्ग है। अब इस वर्ग में अंतर्वेशन किया जा सकता है।

$$Q_1 = L + \frac{i}{f} \times (q_1 - c)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{24} \times (31.25 - 16)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{24} \times (15.25)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{152.5}{24}$$

$$Q_1 = 20 + 6.35$$

$$Q_1 = 26.35$$

इसी प्रकार **तृतीय चतुर्थक**

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{125}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } \left(\frac{375}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 93.75^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 96 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 40–50 को तृतीय चतुर्थक वर्ग माना जायेगा। अब

$$Q_3 = L + \frac{i}{f} \times (q_3 - c)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{10}{20} \times (93.75 - 76)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{10}{20} \times (17.75)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{177.5}{20}$$

$$Q_3 = 40 + 8.875$$

$$Q_3 = 48.875 = 48.88$$

अब **चतुर्थक विचलन**

$$Q.D. = (Q_3 - Q_1) / 2$$

$$Q.D. = (48.88 - 26.35) / 2$$

$$Q.D. = 22.53 / 2$$

$$Q.D. = 11.265 = 11.27$$

और अब **चतुर्थक विचलन का गुणांक**

$$\text{Coefficient of QD} = (Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1)$$

$$\text{Coefficient of QD} = (48.88 - 26.35) / (48.88 + 26.35)$$

$$\text{Coefficient of QD} = 22.53 / 75.23$$

$$\text{Coefficient of QD} = 0.2995$$

अभ्यास प्रष्न 1 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

87, 38, 52, 75, 63, 47, 15, 28, 80, 71, 69, 55, 24, 36 एवं 38

अभ्यास प्रष्न 2 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-9	2	40-49	12	80-89	2
10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रष्न 3 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	10	172

5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12
9	176	योग	800

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिये।ः–

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75-80	5	55-60	7	35-40	7
70-75	7	50-55	12	30-35	7
65-70	15	45-50	18	25-30	8
60-65	18	40-45	5	20-25	4

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या	आय (हजार रु. में)	परिवारों की संख्या
0-5	2	10-13	10	16-19	4
5-7	3	13-15	5	19-20	3
7-9	4	15-16	3	20-25	5
9-10	2				

अभ्यास पश्ष्न 7 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजियेः–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास पश्न 8 निम्न समंकों से दोनों चतुर्थक, चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या	120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

(3) माध्य विचलन (Mean Deviation)

जैसा कि आपको ज्ञात है, अपकिरण के एक आदर्श माप के लक्षणों में से एक यह है कि वह दिए गए समंक तुलक के सभी प्रेक्षणों पर आधारित हो। इस दृष्टि से, विस्तार और चतुर्थक विचलन आदर्श माप नहीं है क्योंकि ये समंकों के सभी प्रेक्षणों पर आधारित नहीं होते। परंतु इस अर्थ में, माध्य (या औसत) विचलन एक आदर्श माप है क्योंकि यह समंकों के सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है। इस माप को निर्दिष्ट आंकड़ों के माध्य से व्यक्तिगत मदों के निरपेक्ष विचलनों के समांतर माध्य के रूप में परिकलित करते हैं। माध्य विचलन के परिकलन में जिस माध्य का बहुधा प्रयोग करते हैं, वह है समांतर—माध्य या माध्यिका, यद्यपि कभी—कभी बहुलक का प्रयोग भी कर लेते हैं। निरपेक्ष विचलनों से अभिप्राय है कि विचलनों के यथार्थ चिन्हों की उपेक्षा कर उन्हें धनात्मक ही मान लेते हैं।

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, \ldots X_n$ दिए हों तो माध्य A से माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हम पहले विचलन, $X_1 - A, X_2 - A, \ldots X_n - A$ ज्ञात करते है। इनमें से कुछ विचलन धनात्मक होंगे तो कुछ ऋणात्मक। यदि हम $X_1 - A$ के धनात्मक मान को दिखाने के लिए प्रतीक $|X_1 - A|$ का प्रयोग करें तो निरपेक्ष विचलनों का योगफल होगा :

$$|X_1 - A| + |X_2 - A| + \ldots\ldots + |X_n - A| = \sum |X - A|$$

इन निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य ही माध्य विचलन (δ) होता है।

A से, माध्य विचलन $\delta_A =$ या

1. जब A, समांतर माध्य $\bar{X}$ हो, तो $\delta_{\bar{X}} =$ या

2. जब A, माध्यिका M हो, तो δ_M =   या

3. जब A, भूयिष्ठक Z हो, तो δ_Z =   या

माध्य विचलन के साथ सदैव उस माध्य के नाम (या प्रतीक) को निर्दिष्ट करते हैं जिस माध्य से विचलन लिए जाएँ। परंतु जब $\bar{X}$ से विचलन लिए जाएँ, तो कुछ लेखक $\bar{X}$ से माध्य विचलन के स्थान पर केवल माध्य विचलन का प्रयोग करते हैं। माध्य विचलन की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि जब विचलन माध्यिका से लिए जाएँ तो इसका मान न्यूनतम होता है। अर्थात् माध्यिका से माध्य विचलन न्यूनतम होता है।

माध्य विचलन के संगत सापेक्ष माप को, जिसे माध्य विचलन गुणांक कहते हैं, प्राप्त करने के लिए माध्य विचलन को उस विशेष माध्य से भाजित करते हैं, जिसका प्रयोग माध्य विचलन के परिकलन में किया गया हो। इस प्रकार, यदि माध्यिका से माध्य विचलन परिकलित किया गया हो तो माध्य विचलन को माध्यिका से भाजित कर माध्य विचलन गुणांक प्राप्त करते हैं। M_d से, माध्य विचलन गुणांक = (M_d से माध्य विचलन) / M_d

इसी प्रकार सूत्र रुप में,

Coefficient of Mean Deviation from Median = $\frac{\delta_M}{M}$

Coefficient of Mean Deviation from Mean = $\delta \bar{X} / \bar{X}$

Coefficient of Mean Deviation from Mode = $\frac{\delta_Z}{Z}$

$\bar{X}$ से माध्य विचलन, सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है, और इसलिए समंक कुलक के प्रत्येक मद के विचरण को उचित आदर देता है। परंतु चिन्हों की उपेक्षा करने की प्रथा और विचलनों के निरपेक्ष मान लेने के कारण, माध्य विचलन पर बीजगणितीय प्रतिपादन कठिन हो जाता है। यद्यपि माध्य विचलन विचरण का एक अच्छा माप है, फिर भी इसका उपयोग सीमित है। यदि हमें केवल कुछ समंक कुलकों के विचरणों को मापना और उनकी तुलना करना अभीष्ट हो तो माध्य विचलन का प्रयोग कर सकते है। माध्य विचलन की संकल्पना को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, निम्न उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 6

निम्न मानों का माध्यिका से माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

18, 25, 63, 59, 29, 72, 17, 25, 105, 87

हल :

क्योंकि प्रेक्षणों की संख्या 10 है, जो कि एक सम संख्या है, इसलिए प्रेक्षणों को क्रमबद्धक करने के उपरांत दो मध्यस्थतम प्रेक्षणों का समांतर माध्य ही माध्यिका होगी। 17, 18, 25, 25, 29, 59, 63, 72, 87, 105 माध्यिका = 1/2 (29+59) = 44

माध्य विचलन का परिकलन

X	$\lvert X-M_d \rvert$
18	26
25	19
63	19
59	15

29	15
72	28
17	27
25	19
105	61
87	43
Total	$\sum \lvert X-M_d \rvert = 272$

माध्यिका से माध्य विचलन $\delta_M =$

$$\delta_M = \frac{272}{10}$$

$$\delta_M = 27.2$$

और अब माध्य विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Mean Deviation from Median} = \frac{\delta_M}{M}$$

$$= \frac{27.2}{44}$$

$$= 0.6182$$

उदाहरण 7

निम्न श्रेणी के समांतर माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

मजदूरी रू.	100	110	120	130	140	कुल
आवृत्ति :	3	12	18	12	3	48

हलः

मजदूरी (x)	आवृत्ति (f)	fx	$\lvert X - \bar{X} \rvert$	$f\lvert X - \bar{X} \rvert$
100	3	300	20	60
110	12	1320	10	120
120	18	2160	0	0
130	12	1560	10	120
140	3	420	20	60
	$\sum f = 48$	$\sum fx = 5760$		$\sum f\lvert X - \bar{X} \rvert = 360$

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{5760}{48}$$

$$\bar{X} = 120$$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन

$$\delta_{\bar{X}} =$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{360}{48}$$

$$\delta_{\bar{X}} = 7.5$$

और अब माध्य विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Mean Deviation from Mean} = \delta \bar{X} / \bar{X}$$

$$= 7.5 / 120$$

$$= 0.0625$$

उदाहरण 8

निम्न श्रेणी के माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

आयु	आवृत्ति	आयु	आवृत्ति	आयु	आवृत्ति
16-20	8	31-35	20	46-50	3
21-25	15	36-40	11	51-55	2
26-30	13	41-45	7	56-60	1

हलः

आयु (x)	आवृत्ति (*f*)	(x)	संचयी आवृत्ति (c*f*)	माध्य मूल्य (m.v)	|X - M|	*f*|X - M|
16-20	8	15.5-20.5	8	18	13.5	108.0
21-25	15	20.5-25.5	23	23	8.5	127.5
26-30	13	25.5-30.5	36	28	3.5	45.5
31-35	20	30.5-35.5	56	33	1.5	30.0
36-40	11	35.5-40.5	67	38	6.5	71.5
41-45	7	40.5-45.5	74	43	11.5	80.5

46-50	3	45.5-50.5	77	48	16.5	49.5
51-55	2	50.5-55.5	79	53	21.5	43.0
56-60	1	55.5-60.5	80	58	26.5	26.5
	$\sum f$ = 80					$\sum f$|X-M|= 582

माध्यिका

$$m = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } \left(\frac{80}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } 40^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 56 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी का आकार अर्थात् **30.5-35.5** माध्यिका वर्ग है। अब इस वर्ग में अंतर्वेशन किया जा सकता है।

$$M = L + \frac{i}{f} \times (m - c)$$

$$M = 30.5 + \frac{5}{20} \times (40 - 36)$$

$$M = 30.5 + \frac{5}{20} \times (4)$$

$$M = 30.5 + 1$$

$$M = 31.5$$

माध्यिका से माध्य विचलन

$$\delta_M =$$

$$\delta_M = \frac{582}{80}$$

$$\delta_M = 7.275$$

और अब माध्य विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Mean Deviation from Median} = \frac{\delta M}{M}$$

$$= \frac{7.275}{31.5}$$

$$= 0.23$$

सारांश–

अपकिरण समंकों के विस्तार या बिखराव को निरूपित करता है। इसका प्रयोग केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से मदों के विचलनों के माध्य को प्रकट करने के लिए भी करते हैं। अपकिरण का परिकलन किसी माध्य की विश्वसनीयता का मूल्यांकन करने के लिए दो या दो से अधिक समंक कुलकों के विचरणों की तुलना करने के लिए

या स्वयं विचरण का नियंत्रण करने के लिए करते हैं। अपकिरण की एक अच्छी माप सभी प्रेक्षणों पर आधारित होनी चाहिए। इसका परिकलन सुगम होना चाहिए और इस पर प्रतिचयन उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव होना चाहिए। यह आगे के बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना चाहिए।

अपकिरण के सापेक्ष मापों का परिकलन दो या दो से अधिक समंक कुलकों में विचरण की तुलना करने के लिए करते हैं। इन्हें प्राप्त करने के लिए अपकिरण के निरपेक्ष मापों को एक उपयुक्त माध्य या आंकड़ों के दो चुने हुए मदों के योगफल के अनुपात के रूप में प्रकट करते हैं। प्रायः प्रयोग में आने वाले अपकिरण के विभिन्न माप है : विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन और मानक विचलन। विस्तार को आंकड़ों के उच्चतम और निम्नतम मदों के अंतर के रूप में परिभाषित करते हैं। यह समस्त आंकड़ों के विस्तार को प्रकट करता है। चतुर्थक विचलन Q_1 और Q_3 के अंतर का आधा होता है। यह केवल मध्यस्थ 50 प्रतिशत मदों पर आधारित होता है। माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से मदों के निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य होता है केन्द्रीय प्रवृत्ति का यह माप समांतर–माध्य, माध्यिका या कई बार बहुलक भी हो सकता है। विवृतमुखी आंकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन एक उपयुक्त माप है। जब चरम मानों को उचित महत्व देना हो, जैसे गुण नियंत्रण में, मूल्यों के अध्ययन में, या मौसम संबंधी आंकड़ों में, तो विस्तार उपयोगी होता है। क्योंकि माध्य विचलन सभी मदों पर आधारित होता है, इसलिए बहुत सी स्थितियों में यह समंकों के विचरण का अन्य दो मापों की तुलना में श्रेष्ठतर प्रतिनिधि होता है।

अभ्यास प्रश्न 1 निम्न समंकों से समान्तर माध्य तथा माध्यिका पर आधारित माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

87, 38, 52, 75, 63, 47, 15, 28, 80, 71, 69, 55, 24, 36, 38

अभ्यास प्रश्न 2 निम्न समंकों से भूयिष्ठक तथा माध्यिका पर आधारित माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	10	172
5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12
9	176	योग	800

अभ्यास प्रश्न 3 निम्न समंकों से समान्तर माध्य तथा माध्यिका पर आधारित माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से समान्तर माध्य, भूयिष्ठक तथा माध्यिका पर आधारित माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः—

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति

0-9	2	40-49	12	80-89	2
10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न समंकों से समान्तर माध्य तथा माध्यिका पर आधारित माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से भूयिष्ठक तथा माध्यिका पर आधारित माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 से अधिक	250	30 से अधिक	190	60 से अधिक	125
10 से अधिक	225	40 से अधिक	175	70 से अधिक	60
20 से अधिक	210	50 से अधिक	155	80 से अधिक	10

(3) मानक विचलन/प्रमाप विचलन **(Standard Deviation)**

उद्देश्य–

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- मानक विचलन और विचरण गुणांक की परिभाषा कर सके।
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए इनका परिकलन कर सके।
- मानक विचलन के गुणों और परिसीमाओं की व्याख्या कर सके।
- लॉरेंज वक्र बना सकें तथा आलेखीय विधि द्वारा मदों की असमानताओं का निर्धारण कर सकें।
- अपकिरण की विभिन्न मापों की तुलना कर सकें तथा उपयुक्त स्थानों पर उनका प्रयोग कर सकें।

प्रस्तावना–

अब तक आपने अपकिरण के तीन मापों अर्थात् विस्तार, चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन के विषय में पढ़ा है। इनमें से प्रथम दो, समंकों की दो चुनी हुई मदों पर आधारित होती हैं, तथा तीसरी माप, प्रत्येक मद के मूल्यों का प्रयोग करके परिकलित की जाती हैं। किन्तु माध्य विचलन के परिकलन में केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के ऋणात्मक चिन्हों पर ध्यान नहीं दिया जाता। चूंकि हम परिकलन के अंतर्गत आए चिन्हों की अवहेलना कर देते हैं, अतः माध्य विचलन की कुछ परिसीमाएँ हो जाती है। अपरिकण की एक अन्य माप, अर्थात् मानक

विचलन चिन्हों की इस समस्या का समाधान प्रस्तुत करती है। इस इकाई में आप विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए मानक विचलन और इसके गुणांकों के परिकलन की विधियों तथा उनके गुणों, परिसीमाओं और उपयोगों का अध्ययन करेंगे। आप लॉरेंज वक्र के विषय में भी जानकारी प्राप्त करेंगे, जो कि अपकिरण ज्ञात करने की आलेखीय विधि है।

मानक विचलन–

जैसा कि पहले विचलन किया गया है, माध्य विचलन का परिकलन करते समय हम केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के ऋणात्मक चिन्हों की अवहेलना कर देते हैं। ऐसा इसलिये है कि अपकिरण में हम केवल यह जानना चाहते हैं कि औसतन मदें केन्द्रीय प्रवृत्ति से कितनी विचलित हैं, तथा इस तथ्य पर विचार नहीं करते कि वे केन्द्रीय प्रवृत्ति से कम हैं अथवा अधिक। परिकलन के अंतर्गत आए चिन्हों की इस प्रकार अवहेलना करने से माप की कुछ परिसीमाएँ उत्पन्न हो जाती है। चिन्हों की अवहेलना करने का एक गणितीय हल उनका वर्गफल निकालना है। चूंकि किसी ऋणात्मक मद का वर्गफल धनात्मक हो जाता है, अतः अपकिरण की एक नई माप परिभाषित होती है जिसमें विचलनों को पहले वर्गीकित किया जाता है (चिन्हों की अवहेलना करने के लिए) तथा फिर उनका औसत निकाला जाता है। इस प्रकार प्राप्त मूल्य विचलनों के वर्गों का माध्य प्रदान करता है, न कि प्रत्यक्ष रूप से विचलनों का। अतः अंत में इस मूल्य का वर्गमूल निकाला जाता हे। अतः इस प्रकार प्राप्त परिणाम विचलनों का अप्रत्यक्ष औसत प्रदान करता है। चूंकि यह माप केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल प्राप्त करके परिकलित किया जाता है, अतः इसे मूल माध्य वर्ग विचलन भी कहा जाता है। माध्य विचलन की भांति, मूल माध्य वर्ग विचलन भी समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक को मदों के मूल्यों में से घटाकर परिकलित किया जा सकता है। हर प्रकार के समंकों में, इन तीनों मूल्यों में से समांतर माध्य से लिया गया मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है। अतः इसे मानक विचलन कहा जाता है। आइये, अब हम मानक विचलन के अर्थ, इसके परिकलन की विधियों, इसके गुणों और परिसीमाओं का अध्ययन करें।

मानक विचलन का अर्थ–

मानक विचलन की परिभाषा दिए गए प्रेक्षणों के, उनके समांतर माध्य से विचलनों के वर्गफल के समांतर माध्य के वर्गमूल के रूप में की जा सकती है। इसे सामान्यतः ग्रीक अक्षर σ (सिग्मा) द्वारा सूचित किया जाता है। मानक विचलन का परिकलन करने के मुख्य चरण निम्न प्रकार है :

1. दी गई श्रेणी का समांतर माध्य परिकलित कीजिए।
2. विभिन्न मदों का समांतर माध्य से विचलन परिकलित कीजिए।
3. समस्त व्यक्तिगत विचलनों का वर्ग परिकलित कीजिए।
4. वर्गांकित विचलनों का योग कीजिए तथा योगफल को मदों की संख्या से भाग दीजिये।
5. परिणामित संख्या का वर्गमूल श्रेणी का मानक विचलन (σ) होगा। N प्रेक्षणों के एक कुलक के लिए, जो $X_1, X_2, \ldots X_N$ हैं तथा जिनका समांतर माध्य $\bar{X}$ है, समांतर माध्य से विचलन $(X_1 - \bar{X}), (X_2 - \bar{X}), \ldots (X_N - \bar{X})$ होंगे। अतः समांतर माध्य से विचलनों के वर्गफल $(X_1 - \bar{X})^2, (X_2 - \bar{X})^2, \ldots (X_n - \bar{X})^2$ होंगे। इनका योग $\sum (X - \bar{X})^2$ या $\sum d^2$ होगा, जहां d का अर्थ $(X - \bar{X})$ से है। अतः समांतर माध्य से माध्य वर्ग विचलनः

$$\sigma = \sqrt{}$$

परिभाषित करने की इस विधि से हमें मानक विचलन का परिकलन करने की विधि को समझने में भी सहायता मिलती है। यदि समांतर माध्य से विचलनों के स्थान पर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जायें जहां dx का अर्थ (X - A) से है और फिर उनके आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

यदि कल्पित माध्य से भी विचलन ज्ञात न किये जायें और केवल आकार (x) के आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

मानक विचलन के संगत सापेक्ष माप को, जिसे मानक विचलन गुणांक कहते हैं, प्राप्त करने के लिए मानक विचलन को समान्तरा माध्य से भाजित करते हैं। इसी प्रकार सूत्र रुप में,

Coefficient of Standard Deviation = $\sigma / \bar{X}$

मानक विचलन की संकल्पना को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, निम्न उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 9

निम्न मानों से मानक विचलन एवं उसके गुणांक को परिकलित कीजिए :

3, 4, 6, 7, 15, 25

हल :

आकार (x)	$d = (X - \bar{X})$	d^2
3	-7	49
4	-6	36
6	-4	16
7	-3	9
15	5	25
25	15	225
$\sum x = 60$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 360$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{60}{6} = 10$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{360}{6}}$$

$$\sigma = \sqrt{60}$$

$$\sigma = 7.75$$

और अब मानक विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Standard Deviation} = \sigma / \bar{X}$$

$$= 7.75 / 10$$

$$= 0.78$$

यदि समांतर माध्य से विचलनों के स्थान पर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जायें और फिर उनके आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

आकार (x)	dx = (X - A) A=6	dx^2
3	-3	9
4	-2	4
6	0	0
7	1	1
15	9	81
25	19	361
$\sum x = 60$	$\sum dx = 24$	$\sum dx^2 = 456$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A +$$

$$\bar{X} = 6 + \frac{24}{6}$$

$$\bar{X} = 6 + 4 = 10$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{456}{6}\right) - \left(\frac{24}{6}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(76) - (4)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{76 - 16}$$

$$\sigma = \sqrt{60}$$

$$\sigma = 7.75$$

और अब मानक विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Standard Deviation} = \sigma / \bar{X}$$

$$= 7.75 / 10$$

$= 0.78$

आपने देखा कि यदि समांतर माध्य से विचलनों के स्थान पर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जायें और फिर उनके आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तो भी समान परिणाम प्राप्त होते हैं। यदि कल्पित माध्य से भी विचलन ज्ञात न किये जायें और केवल आकार (x) के आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तो भी कोई अन्तर नहीं आयेगाः

आकार (x)	x^2
3	9
4	16
6	36
7	49
15	225
25	625
$\sum x = 60$	$\sum x^2 = 960$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{960}{6}\right) - \left(\frac{60}{6}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(160) - (10)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{160 - 100}$$

$$\sigma = \sqrt{60}$$

$$\sigma = 7.75$$

वर्गीकृत समंकों के लिए ऊपर दी गई परिभाषा में कुछ समायोजन की आवश्यकता है। यदि समंकों को समूहित किया जाता है तो मदों (अथवा वर्गांतरों के मध्य मूल्यों) के उनके समांतर माध्य से विचलनों के वर्गफलों को पहले उनसे सम्बन्धित आवृत्तियों से गुणा किया जाता है, फिर उनका योग किया जाता है, तत्पश्चात् आवृत्तियों के कुल योग से भाग दिया जाता है। अतः समूहित समकों के लिए मानक विचलन इस प्रकार प्राप्त होगा :

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

यदि समांतर माध्य से विचलनों के स्थान पर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जायें जहां dx का अर्थ (X - A) से है, और फिर उनके आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

यदि कल्पित माध्य से भी विचलन ज्ञात न किये जायें और केवल आकार (x) के आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

$$\sigma = \sqrt{}$$

यदि उपरोक्त गणनाऐं पद विचलन रीति से की जायें, अर्थात् कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते समय कोई समान संख्या या वर्गान्तर से विचलनों को भाजित कर दिया जाये तो उपरोक्त सूत्र में उस समान संख्या (c) या वर्गान्तर (i) की गुणा भी करनी होगीः

$$\sigma = \sqrt{} \text{ X c or i}$$

वर्गीकृत समंकों के लिए मानक विचलन एवं उसके गुणांक की संकल्पना को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, निम्न उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 10

निम्न मानों से मानक विचलन एवं उसके गुणांक को परिकलित कीजिए :

x	10	12	14	16	18	20	22
f	3	5	9	16	8	7	2

हल :

x	*f*	*f*x	d = (X - $\bar{X}$)	*f*d	*f*.d^2 = *f*d.d
10	3	30	-6	-18	108
12	5	60	-4	-20	80
14	9	126	-2	-18	36
16	16	256	0	0	0
18	8	144	2	16	32
20	7	140	4	28	112
22	2	44	6	12	72
	$\sum f = 50$	$\sum fx = 800$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum f.d^2 = 440$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{800}{50} = 16$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{440}{50}}$$

$$= \sqrt{8.8}$$

$$= 2.97$$

और अब मानक विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Standard Deviation} = \sigma / \bar{X}$$

$$= 2.97 / 16 = 0.1856$$

यदि समांतर माध्य से विचलनों के स्थान पर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जायें जहां dx का अर्थ (X - A) से है, और फिर उनके आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

x	f	dx = (X-A) A=15	f.dx	$f.dx^2 = f dx.dx$
10	3	-5	-15	75
12	5	-3	-15	45
14	9	-1	-9	9
16	16	1	16	16
18	8	3	24	72
20	7	5	35	175
22	2	7	14	98
	$\sum f = 50$	$\sum dx = 7$	$\sum f.dx = 50$	$\sum f.dx^2 = 490$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A +$$

$$\bar{X} = 15 + \frac{50}{50}$$

$$\bar{X} = 15 + 1 = 16$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{490}{50}\right) - \left(\frac{50}{50}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(9.8) - (1)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{9.8 - 1}$$

$$= \sqrt{8.8}$$

$$= 2.97$$

यदि कल्पित माध्य से भी विचलन ज्ञात न किये जायें और केवल आकार (x) के आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

x	f	fx	$fx^2 = fx.x$

10	3	30	300
12	5	60	720
14	9	126	1764
16	16	256	4096
18	8	144	2592
20	7	140	2800
22	2	44	968
	$\sum f = 50$	$\sum fx = 800$	$\sum fx^2 = 13240$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{800}{50} = 16$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{13240}{50}\right) - \left(\frac{800}{50}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(264.8) - (16)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{264.8 - 256}$$

$$= \sqrt{8.8}$$

$$= 2.97$$

आपने देखा कि प्रत्येक विधि से मानक विचलन के समान परिणाम प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 11

निम्न समंकों से समान्तर माध्य, मानक विचलन एवं उसके गुणांक को परिकलित कीजिए :

प्राप्तांक	0-25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150-175
विद्यार्थी	4	8	8	18	12	6	4

हल :

प्राप्तांक	विद्यार्थी (f)	मध्य मान (x)	fx	d = (X - $\bar{X}$)	fd	$f.d^2 = fd.d$
0-25	4	12.5	50	-75	-300	22500
25-50	8	37.5	300	-50	-400	20000
50-75	8	62.5	500	-25	-200	5000

75-100	18	87.5	1575	0	0	0
100-125	12	112.5	1350	25	300	7500
125-150	6	137.5	825	50	300	15000
150-175	4	162.5	650	75	300	22500
	$\sum f = 60$		$\sum fx = 5250$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum f.d^2 = 92500$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{5250}{60} = 87.5$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{92500}{60}}$$

$$\sigma = \sqrt{1541.67}$$

$$\sigma = 39.26$$

और अब मानक विचलन का गुणांक

$$\text{Coefficient of Standard Deviation} = \sigma \,/\, \bar{X}$$

$$= 39.26 \,/\, 87.5$$

$$= 0.4487$$

यदि समांतर माध्य से विचलनों के स्थान पर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जायें जहां dx का अर्थ (X - A) से है, और फिर उनके आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

प्राप्तांक	विद्यार्थी (f)	मध्य मान (x)	dx = (X-A) A=112.5	f.dx	$f.dx^2 = f dx.dx$
0-25	4	12.5	-100	-400	40000
25-50	8	37.5	-75	-600	45000
50-75	8	62.5	-50	-400	20000
75-100	18	87.5	-25	-450	11250
100-125	12	112.5	0	0	0
125-150	6	137.5	25	150	3750
150-175	4	162.5	50	200	10000

	$\sum f$ = 60		$\sum dx$ = -175	$\sum f.dx$ = -1500	$\sum f.dx^2$ = 130000

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A +$$

$$\bar{X} = 112.5 + \frac{-1200}{60}$$

$$\bar{X} = 112.5 - 25 = 87.5$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{130000}{60}\right) - \left(\frac{-1200}{60}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(2166.67) - (-25)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{2166.67 - 625}$$

$$= \sqrt{1541.67}$$

$$= 39.26$$

यदि केवल आकार (x) के आधार पर मानक विचलन ज्ञात करें तोः

प्राप्तांक	विद्यार्थी (f)	मध्य मान (x)	fx	$fx^2 = fx.x$
0-25	4	12.5	50	625
25-50	8	37.5	300	11250
50-75	8	62.5	500	31250
75-100	18	87.5	1575	137812.5
100-125	12	112.5	1350	151875
125-150	6	137.5	825	113437.5
150-175	4	162.5	650	105625
	$\sum f$ = 60		$\sum fx$ = 5250	$\sum fx^2$ = 551875

समान्तर माध्य

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{[illegible]}{[illegible]} = 87.5$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{551875}{60}\right) - \left(\frac{5250}{60}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(9197.9167) - (87.5)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{9197.9167 - 7656.25}$$

$$\sigma = \sqrt{1541.67}$$

$$\sigma = 39.26$$

यदि उपरोक्त गणनाऐं पद विचलन रीति से की जायें, अर्थात् कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते समय कोई समान संख्या या वर्गान्तर से विचलनों को भाजित कर दिया जाये तो :

प्राप्तांक	विद्यार्थी (f)	मध्य मान (x)	dx = (X-A)/i A=112.5 i=25	f.dx	$f.dx^2 = f$dx.dx
0-25	4	12.5	-4	-16	64
25-50	8	37.5	-3	-24	72
50-75	8	62.5	-2	-16	32
75-100	18	87.5	-1	-18	18
100-125	12	112.5	0	0	0
125-150	6	137.5	1	6	6
150-175	4	162.5	2	8	16
	$\sum f = 60$		$\sum$dx = -7	$\sum f$.dx = -60	$\sum f.dx^2 = 208$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A + X\ i$$

$$\bar{X} = 112.5 + \frac{-60}{60} X\ 25$$

$$\bar{X} = 112.5 - 25 = 87.5$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}\ X\ c\ or\ i$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{208}{60}\right) - \left(\frac{-60}{60}\right)^2}\ X\ 25$$

$$\sigma = \sqrt{(3.4667) - (-1)^2}\ X\ 25$$

$$\sigma = \sqrt{3.4667 - 1} \text{ X } 25$$

$$\sigma = \sqrt{2.4667} \text{ X } 25$$

$$\sigma = 1.5706 \text{ X } 25$$

$$\sigma = 39.26$$

आपने देखा कि यद्यपि प्रत्येक विधि से मानक विचलन के समान परिणाम प्राप्त होते हैं, फिर भी गणनाओं के सरलीकरण के लिये पद–विचलन रीति ही सर्वाधिक उपयुक्त है।

(4) प्रसरण **(Variance)**

मानक विचलन के वर्ग (σ^2) को प्रसरण कहते हैं। अतः अवर्गित समंकों के लिए प्रसरण को ज्ञात करने के सूत्रः

σ^2 या V =

σ^2 या V =

σ^2 या V =

तथा वर्गित समंकों के लिए प्रसरणः

σ^2 या V =

σ^2 या V =

σ^2 या V =

σ^2 या V = X c or i

आइये, कुछ उदाहरणों द्वारा प्रसरण के परिकलन के लिए आवश्यक चरणों को समझें।

उदाहरण 12

उदाहरण 9 के समंकों से प्रसरण ज्ञात कीजिए :

हल : यदि उदाहरण 9 की गणनाओं को ध्यानपूर्वक देखें तो स्पष्ट होता है कि $\sigma = 7.75$ है अतः σ^2 या V = 60 होगा।

उदाहरण 13

उदाहरण 10 के समंकों से प्रसरण ज्ञात कीजिए :

हल : यदि उदाहरण 10 की गणनाओं को ध्यानपूर्वक देखें तो स्पष्ट होता है कि $\sigma = 2.97$ है अतः σ^2 या V = 8.8 होगा।

उदाहरण 14

उदाहरण 11 के समंकों से प्रसरण ज्ञात कीजिए :

हल : यदि उदाहरण 11 की गणनाओं को ध्यानपूर्वक देखें तो स्पष्ट होता है कि σ = **39.26** है अतः σ^2 या V = **1541.67** होगा।

(5) विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)

विचरण गुणांक, जिसे प्रतिशतताओं में व्यक्त मानक विचलन गुणांक के नाम से भी जाना जाता है, श्रेणी के समांतर माध्य से मानक विचलन के अनुपात पर आधारित होता है। अतः विचरण गुणांक को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\text{विचरण गुणांक } C.V. = (\sigma / \bar{X}) \times 100$$

विचरण गुणांक अपकिरण का एक सापेक्ष माप है और इसे सामान्यतः प्रतिशत के रूप में व्यवक्त किया जाता है। अतः इसका उपयोग भिन्न इकाइयों में दिये गए प्रेक्षणों के दो कुलकों के अपकिरण की तुलना करने के लिए सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। यदि प्रेक्षणों की इकायाँ समान हों, परंतु उनके औसत मान बहुत भिन्न हों, तब भी उनके अपकिरण की तुलना के लिए इसका उपयोग किया जा सकता है। अतः प्रेक्षणों के दो या अधिक कुलकों की सुतथ्यता के माप या तुलना के लिए भी इसका प्रयोग किया जा सकता है।

इस बात को समझने के लिए आइये एक उदाहरण लें। मान लो, हम दिल्ली और बम्बई के बीच की दूरी नापते हैं तथा 1540 किमी. की वास्तविक दूरी में 1 किमी. या 100000 सेमी. का विचलन करते हैं एक मीटर कपड़े के टुकड़े को मापने में 10 सेमी. के विचलन की तुलना में इस विचलन का महत्व नगण्य है। जब प्रथम स्थिति के 100000 सेमी. के विचलन की तुलना प्रत्यक्ष रूप से दूसरी स्थिति के 10 सेमी. विचलन से की जाती है, तो यह तथ्य स्पष्ट नहीं होता। चूंकि 100000 सेमी. 10सेमी. से अधिक है, तो यह निष्कर्ष निकाले जाने की संभावना है कि प्रथम स्थिति में माप का विचलन बहुत अधिक महत्वपूर्ण है। किन्तु यदि हम गुणांकों का परिकलन करें, तो चित्र स्पष्ट हो जाता है। प्रथम स्थिति में गुणांक केवल 0.865 प्रतिशत है, तथा दूसरी स्थिति में गुणांक 1 प्रतिशत है। अतः दूसरी सिथति में विचलन सापेक्ष रूप से अधिक है। अतः जब कभी विचलन की तुलना करनी हो तो यह विचरण गुणांक के द्वारा ही की जानी चाहिए।

उदाहरण 15

एक फुटबाल के मौसम में टीम ए द्वारा दागे गये गोलों का रिकार्ड नीचे दिया गया है :

एक मैच में दागे गए गोलों की संख्या :	0	1	2	3	4
मैचों की संख्या :		1	9	7	5	3

टीम बी के लिए, दागे गए गोलों की प्रति मैच औसत संख्या 2.5 व मानक विचलन 1.25 गोल था। कौन सी टीम अधिक संगत है।

हल :

यदि तुलनात्मक अध्ययन करना हो तो सापेक्ष माप विचरण गुणांक की गणना करनी चाहिये।

टीम ए के लिये:

x	f	dx = (X-A) A=2	f.dx	$f.dx^2 = f dx.dx$
0	1	-2	-2	4
1	9	-1	-9	9
2	7	0	0	0
3	5	1	5	5

4	3	2	6	12
	$\sum f = 25$	$\sum dx = 0$	$\sum f.dx = 0$	$\sum f.dx^2 = 30$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A +$$

$$\bar{X} = 2 + \frac{0}{25}$$

$$\bar{X} = 2 + 0 = 2$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{30}{25}\right) - \left(\frac{0}{25}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(1.2) - (0)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{1.2 - 0}$$

$$\sigma = \sqrt{1.2}$$

$$\sigma = 1.0954$$

विचरण गुणांक

$$C.V. = (\sigma \ / \ \bar{X}) \text{ X } 100$$

$$C.V. = (1.0954 \ / \ 2) \text{ X } 100$$

$$C.V. = 54.77\%$$

टीम बी के लियेः

टीम बी के लिये समान्तर माध्य = 2.5 एवं प्रमाप विचलन = 1.25 प्रष्न में दिये गये हैं।

अतः विचरण गुणांक

$$C.V. = (\sigma \ / \ \bar{X}) \text{ X } 100$$

$$C.V. = (1.25 \ / \ 2.5) \text{ X } 100$$

$$C.V. = 50\%$$

तुलनात्मक निष्कर्षः

1. टीम बी के लिये समान्तर माध्य अधिक है अतः वह टीम ए की तुलना में अधिक गोल दागने वाली टीम है।

2. टीम ए के लिये विचरण गुणांक अधिक है अतः वह टीम बी की तुलना में अधिक उतार–चढ़ाव वाली टीम है, इसलिए टीम बी अधिक संगत टीम है।

अभ्यास प्रश्न 1 निम्न समंकों से विचरण गुणांक की गणना कीजियेः–

नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक
1041	87	1046	47	1051	69
1042	38	1047	15	1052	55
1043	52	1048	28	1053	24
1044	75	1049	80	1054	36
1045	63	1050	71	1055	38

अभ्यास प्रष्न 2 निम्न समंकों से प्रसरण की गणना कीजियेः–

माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि
जनवरी	10000	मई	-8000	सितंबर	4000
फरवरी	18000	जून	100	अक्तूबर	8000
मार्च	0	जुलाई	400	नवंबर	12000
अप्रेल	-2500	अगस्त	1000	दिसंबर	20000

अभ्यास प्रष्न 3 निम्न समंकों से मानक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	10	172
5	10	11	124
6	33	12	61
7	70	13	32
8	110	14	12
9	176	योग	800

अभ्यास प्रष्न 4 निम्न समंकों से मानक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

पौधों की संख्या	प्रत्येक पौधे पर फूल	11	4
6	5	15	2
8	7	16	3
9	8	20	0
10	6	25	1

अभ्यास प्रष्न 5 निम्न समंकों से प्रसरण की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से मानक विचलन एवं विचरण गुणांक की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-9	2	40-49	12	80-89	2
10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से मानक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75-80	5	55-60	7	35-40	7
70-75	7	50-55	12	30-35	7
65-70	15	45-50	18	25-30	8
60-65	18	40-45	5	20-25	4

अभ्यास प्रश्न 8 निम्न समंकों से मानक विचलन, उसके गुणांक एवं प्रसरण की गणना कीजियेः–

तापमान ^{0}C	दिनों की संख्या		
-40 to -30	10	-10 to 0	42
-30 to -20	28	0 to 10	65
-20 to -10	30	10 to 20	180
		20 to 30	10

अभ्यास प्रश्न 9 निम्न समंकों से मानक विचलन एवं उसके गुणांक की गणना कीजियेः–

केन्द्रीय आकार	आवृत्ति	केन्द्रीय आकार	आवृत्ति
14	1	22	37
16	7	24	29
18	10	26	9
20	44	28	3

अभ्यास प्रश्न 10 निम्न समंकों से विचरण गुणांक एवं प्रसरण की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 11 निम्न समंकों से मानक विचलन की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या

80% से कम	100	40% से कम	32
70% से कम	90	30% से कम	20
60% से कम	80	20% से कम	13
50% से कम	60	10% से कम	5

अभ्यास प्रश्न 12 निम्न समंकों से प्रसरण की गणना कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या				
0 से अधिक	216	120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
60 से अधिक	210	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
		240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

गुण व परिसीमाएँ—

आप मानक विचलन, प्रसरण एवं विचरण गुणांक के अर्थ व उनको परिकलित करने की विधियों से अवगत हो चुके हैं। आइये अब इन के प्रमुख गुणधर्मों का अध्ययन करें।

गुण—

अपकिरण के समस्त मापों में मानक विचलन को श्रेष्ठ माना जाता है क्योंकि इसमें अपकिरण के अच्छे माप के लगभग सभी आवश्यक गुण हैं। मानक विचलन में निम्न गुण है :

1. यह दृढ़ता से परिभाषित होता है, तथा श्रेणी के समस्त प्रेक्षणों पर आधारित होता है।
2. मानक विचलन की द्वितीय विशेषता जो इसे अपकिरण के अन्य मापों से श्रेष्ठतर बनाती है, वह है इसका बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूले होना। अतः यदि हमें बहुत से समूहों में से प्रत्येक की मदों की संख्या, उनका समांतर माध्य तथा मानक विचलन दिया गया हो, तो हम सुगमतापूर्वक संयुक्त समूह का मानक विचलन परिकलित कर सकते हैं।
3. मानक विचलन प्रतिचयन के उच्चावचनों से सबसे कम प्रभावित होता है।
4. एक प्रसामान्य बंटन में समांतर माध्य ± मानक विचलन मानों के 68.36 प्रतिशत का समावेश करता है, जबकि चतुर्थक विचलन केवल 50 प्रतिशत तथा माध्य विचलन केवल 57 प्रतिशत मानों का समावेश करते हैं। इस कारण से मानक विचलन को मानक माप कहा जाता है।

परिसीमाएँ—

अपकिरण के माप के रूप में मानक विचलन की मुख्य परिसीमाएँ या अवगुण निम्नलिखित है :

1. मानक विचलन की एक बड़ी परिसीमा यह है कि भिन्न इकाइयों में दिये गए दो या दो से अधिक श्रेणियों के प्रेक्षणों के अपकिरण की तुलना करने के लिए इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस उद्देश्य के लिए मानक विचलन गुणांक की परिभाषा करनी पड़ती है।
2. समांतर माध्य से विचलनों का वर्गफल निकालने और फिर उन वर्णित विचलनों के समांतर माध्य का वर्गमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया काफी जटिल कार्य लगती है। वास्तव में इससे एक अन्य परिसीमा का उदय होता है, अर्थात् मानक विचलन चरम मूल्यों से बहुत अधिक प्रभावित होता है। विचलनों का वर्ग निकालने की प्रक्रिया समान्तर माध्य से बड़े विचलनों को, जो कि केवल चरम मूल्यों से प्राप्त किये जाते है, अनुचित महत्व प्रदान करती है, तथा उन मदों को कम महत्व देती है जो समांतर माध्य के निकट है।
3. विवृतमुखी वर्गों वाले बंटन के लिए मानक विचलन परिकलित नहीं किया जा सकता।

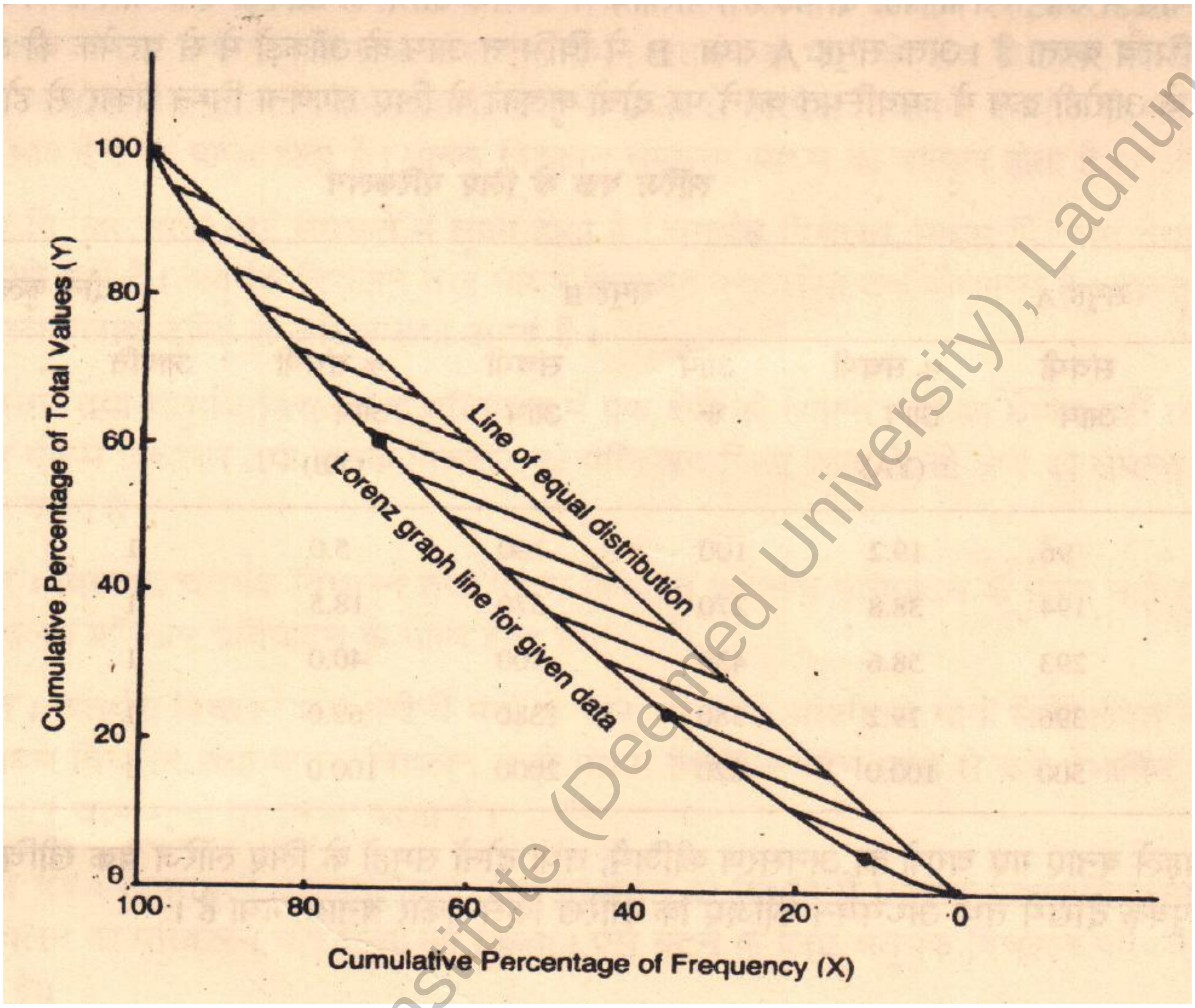
लॉरेंज वक्र–

लॉरेंज वक्र डॉ. मैकस ओ. लॉरेंज द्वारा, जो कि एक प्रसिद्ध आर्थिक सांख्यिक है, प्रकल्पित की गई है। यह अपकिरण का अध्ययन करने की एक लेखाचित्रीय विधि है। यह वक्र जो मूल रूप से उनके द्वारा सम्पत्ति और आय के बंटन का माप करने के लिए प्रयोग किया गया था, अब लाभ मजदूरी तथा कुल बिक्री आदि के बंटनों के लिए भी प्रयोग किया जाने लगा है।

लॉरेंज वक्र बनाने के लिए निम्नलिखित कदम उठाए जाते हैं :

1. विभिन्न समूहों से मदों के कुल मान प्राप्त किये जाते हैं।
2. फिर विभिन्न समूहों से संगत मदों के कुल मानों और आवृत्तियों का ''से कम'' प्रकार मे संचय किया जाता है तथा उन्हें प्रतिशतताओं में परिवर्तित किया जाता है।
3. x अक्ष पर स्केल 100 से प्रारम्भ करते है तथा यह 0 तक जाता है। इसे संचयी आवृत्तियों (x) की प्रतिशतता के लिए प्रयोग किया जाता है।
4. y अक्ष पर स्केल 0 से प्रारम्भ करते है तथा यह 100 तक जाता है। इसे मद के कुल मानों (y) की प्रतिशतता के लिए प्रयोग किया जाता हैं।
5. x अक्ष पर 0 को y अक्ष पर 100 से जोड़ती हुई एक कर्ण रेखा खींची जाती है। इसे समान बंटन की रेखा कहा जाता है। इस कर्ण पर कोई भी बिंदु x तथा y पर समान प्रतिशतता दर्शाता है।
6. x और y से संगत विभिन्न बिंदुओं को आलेखित किया जाता है तथा उन्हें मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त की गई रेखा, जब तक कि समस्त मदें बिलकुल बराबर न हों, सदैव समान बंटन की रेखा के नीचे एक वक्र बनाएगी। समान बंटन की रेखा तथा आलेखित वक्र के बीच का क्षेत्रफल मदों में असमानता की सीमा दर्शाता है। यदि विभिन्न बंटनों का वक्र एक ही लॉरेंज प्रस्तुति में दिखाया जाए, तो कर्ण रेखा से सबसे अधिक दूरी वाला वक्र सर्वाधिक असमानता प्रस्तुत करता है।

निम्न चित्र को ध्यानपूर्वक देखिये और अध्ययन कीजिये कि यह किस प्रकार खींचा गया है।



अपकिरण की मापों की तुलना–

अभी तक हमने विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, तथा मानक विचलन जैसे अपकिरण के विभिन्न मापों के अर्थ, परिकलन, गुण व परिसीमाओं का विवेचन किया है। किंतु आपको किसी एक दी गई परिस्थिति में अपकिरण के उचित माप का चुनाव करने के योग्य होना चाहिए। आप सही चुनाव कर सकें, इसके लिए आवश्यक है कि आप इन मापों के सापेक्ष लक्षणों के विषय में जानें। अतः आइये अब हम इन मापों की एक दूसरे से तुलना करें, ताकि हम अपकिरण के इन मापों के सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं के विषय में जान सकें।

1. प्रकार : विस्तार तथा चतुर्थक विचलन अपकिरण के ऐसे माप हैं जो समंकों का प्रसार प्रदान करते हैं, जबकि माध्य विचलन तथा मानक विचलन अपकिरण के ऐसे माप हैं जो केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से विचलनों का औसत प्रदान करते हैं।

2. परिकलन : विस्तार एक श्रेणी की उपरिसीमा तथा निचली सीमा के मानों के बीच का अंतर होता है। चतुर्थक विचलन एक श्रेणी के तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के मानों के बीच के अंतर को दो से भाग देने पर प्राप्त होता है। माध्य विचलन किसी श्रेणी में माध्य से निरपेक्ष विचलनों के योग को मदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। मानक विचलन समांतर माध्य का वर्गमूल होता है।

3. परिणाम : विस्तार सरल तथा समझने में सुगम होता है। चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन तथा मानक विचलन ऐसे नहीं है। चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन कुछ सीमा तक बोधगम्य हैं। किन्तु मानक विचलन तुलनात्मक दृष्टि से जटिल तथा अमूर्त है।

4. मदें : विस्तार तथा चतुर्थक विचलन के परिकलन में एक श्रेणी की समस्त मदों का ध्यान नहीं रखा जाता, किन्तु जब माध्य विचलन तथा मानक विचलन का परिकलन किया जाता है, तो श्रेणी की समस्त मदों का ध्यान रखा जाता है।

5. प्रतिपादन : विस्तार, चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन गणितीय प्रतिपादन के योग्य नहीं होतें। मानक विचलन गणितीय प्रतिपादन के योग्य होता है।

6. चरम मान : चतुर्थक विचलन एक श्रेणी में मदों के चरम मानों या असामान्य मानों से प्रभावित नहीं होता। माध्य विचलन तथा मानक विचलन में से माध्य विचलन चरम मानों से कम प्रभावित होता है। विस्तार केवल चरम मानों पर निर्भर करता है।

7. विवृतमुखी वर्ग : विवृतमुखी वर्गान्तरों वाले आवृत्ति बंटन की स्थिति में विस्तार माध्य विचलन तथा मानक विचलन का परिकलन नहीं किया जा सकता। ऐसे बंटन के लिए चतुर्थक विचलन परिकलित किया जा सकता है।

8. विश्वस्तता : मानक विचलन को अपकिरण का सबसे अधिक विश्वसनीय माप माना जाता है। विस्तार या चतुर्थक विचलन या माध्य विचलन अपकिरण का ऐसा विश्वसनीय माप नहीं है। वास्तव में मानक विचलन प्रतिदर्शी विभ्रमों से कम प्रभावित होता हैं।

9. उपयोग : मानक विचलन को अपकिरण का सर्वोत्तम माप माना जाता है। इसमें अपकिरण के एक अच्छे और विश्वसनीय माप के समस्त गुण विद्यमान हैं। अतः सांख्यिकीय विश्लेषण तथा प्रतिपादन में इसका सर्वाधिक उपयोग होता हैं विस्तार चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन इतने लोकप्रिय नहीं है तथा इनका उपयोग केवल सीमित किंतु समुचित स्थितियों में ही किया जाता है।

सारांश–

माध्य विचलन का परिकलन करते समय विचलनों के चिन्हों की उपेक्षा कर दी जाती है। इससे माप की कुछ परिसीमाएँ हो जाती है। ऐसी परिसीमाओं को निष्प्रभावित करने के लिए एक नया माप, जिसे मूल माध्य वर्ग विचलन कहा जाता है, अपकिरण मापने के लिए परिभाषित किया जाता है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के समांतर माध्य का वर्गमूल होता हे।

समांतर माध्य से लिया गया मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है तथा इसे मानक विचलन का नाम दिया जाता है। मानक विचलन के परिकलन की दो विधियाँ है : (1) प्रत्यक्ष विधि तथा (2) छोटी विधि । पद विचलनों का प्रयोग करने वाली छोटी विधि का प्रयोग अधिक प्रचलित है।

मानक विचलन दृढ़तापूर्वक परिभाषित होता है तो यह समस्त मदों पर आधारित होता है। यह बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होता है तथा प्रतिदर्शी उच्चावचनों से न्यूनतम प्रभावित होता है। किंतु माध्य विचलन की अपेक्षा यह चरम मदों से बहुत अधिक प्रभावित होता है। इसके कुछ गणितीय गुणधर्म भी हैं। यह मूल के परिवर्तन से प्रभवित नहीं होता, किंतु स्केल के परिवर्तन से उसी सीमा तक प्रभावित होता है जिस सीमा तक मदें प्रभावित होती है। इसका मान माध्य विचलन के मान से कभी कम नहीं होता।

सामान्य प्रकार के समंकों के लिए माध्य विचलन मानक विचलन का लगभग 4/5, तथा चतुर्थक विचलन मानक विचलन का लगभग 2/3 होता है। समान्तर माध्य + मानक विचलन के बीच के विस्तार में 68 प्रतिशत मदें तथा समांतर माध्य + 2 मानक विचलन के बीच के विस्तार में 95 प्रतिशत मदें होती हैं।

अपकिरण मापने की लेखाचित्रीय विधि लॉरेंज वक्र है। इसकी परिकल्पना मैक्स ओ. लॉरेंज द्वारा की गई थी। यह दोहरी संचयी प्रतिशतता वक्र है। इसमें x अक्ष पर आवृत्तियों की संचयी प्रतिशतताएँ ली जाती हैं तथा स्केल 100 से प्रारम्भ होकर 0 तक जाता है तथा हम दाहिनी ओर चलते हैं। मदों के कुल मानों की संचयी प्रतिशतताएँ y अक्ष पर आलेखित की जाती है, तथा स्केल 0 से प्रारम्भ होकर ऊपर की ओर 100 तक जाता है। बिंदुओं (0,0) से बिन्दुओं (100,100) को मिलाने वाली रेखा को समान बंटन की रेखा कहा जाता है और एक साथ दोनों अक्ष अधिकतम असमानता के लिए लॉरेंज वक्र होते हैं। अतः समान बंटन की रेखा तथा किन्हीं समंकों के लेखाचित्र के बीच का क्षेत्रुल समंकों में उपस्थित असमानताओं की सीमा का प्रतिनिधित्व करता है।

यूनिट 2

विषमता या वैषम्य (Skewness)

उद्देश्य–

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो जाएँगे कि आप :

- वैषम्य और अपकिरण में भेद कर सकें।
- सममित, धनात्मक विषम और ऋणात्मक विषम समंकों में अंतर बता सकें।
- विभिन्न विधियों से वैषम्य का परिकलन कर सकें।
- एक निर्दिष्ट परिस्थिति में उपयुक्त परिकलन विधि का निश्चय कर सकें।
- समंकों के विश्लेषण में प्रसामान्य वक्र की भूमिका का परिबोध और उसके विशेष गुणों की चर्चा कर सकें।

प्रस्तावना–

जैसा कि आप जानते हैं, किन्हीं दिए गए संख्यात्मक समंकों का विष्लेषण करने के लिए उसके तीन मुख्य लक्षण विचारणीय होते है : (1) केन्द्रीय प्रवृत्ति, अर्थात् वह मान जिसके निकट (गिर्द) अन्य बहुत से मद एकत्रित होते हैं। (2) अपकिरण, अर्थात् मदों के केन्द्रीय प्रवृत्ति से विचलन की मात्रा, और (3) वैषम्य, अर्थात् मदों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के निकट वितरण की प्रकृति। इस इकाई में आप तीसरे लक्षण, वैषम्य के बारे में पढ़ेंगे।

आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों, अर्थात् समांतर माध्य, माध्यिका, भूयिष्ठका, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य और गतिमान माध्य का अध्ययन कर लिया है। पिछली इकाई में आपने अपकिरण की मापों, अर्थात् विस्तार चतुर्थक विचलन, माध्य–विचलन, मानक विचलन और लॉरेंज वक्र का अध्ययन किया है। इस इकाई में आप तीसरे लक्षण, अर्थात् वैषम्य के बारे में पढ़ेंगे।

आप वैषम्य के अर्थ, प्रयोजन और पकिलन विधियों का अध्ययन करेंगे। आप समंकों के विश्लेषण में सामान्य वक्र की भूमिका और उसकी विशेषताओं का भी अध्ययन करेंगे। वस्तुतः एक अन्य लक्षण और भी है, जिसे कुकदता कहते है और जो समंकों के केन्द्रीय भाग में आवृत्तियों के संकेन्द्रण को प्रकट करता है। इसका अध्ययन प्रस्तुत पाठ्यक्रम के विषय–क्षेत्र से बाहर है।

वैषम्य का अर्थ–

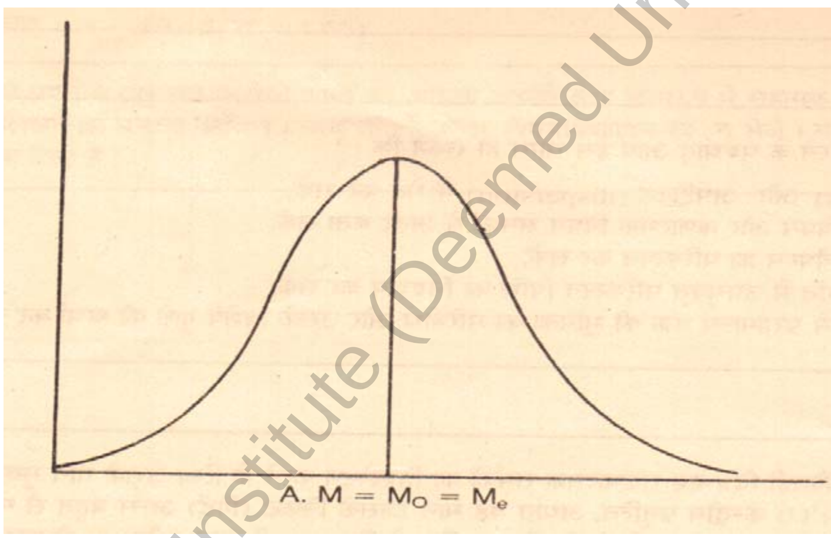
एक आवृत्ति बंटन को सममित बंटन कहते हैं, यदि आवृत्तियाँ, केन्द्रीय प्रवृत्ति के सापेक्ष सममित रूप से बंटी हों, अर्थात् यदि केन्द्रीय प्रवृत्ति (मध्य) से समदूरस्थ चर मानों की आवृत्तियाँ समान हो। निम्नलिखित दो बंटनों का अध्ययन कीजिए।

क)	x	:	10	15	20	25	30
	f	:	5	8	26	8	5

यहाँ x = 20, मध्य के मदों का वर्ग है।

ख)	x	:	5-9	9-13	13-17	17-21	21-24
	f	:	7	18	25	18	7

यहाँ 13—17, मध्य के मदों का वर्ग हे। आप सरलता से समझ सकते हैं कि ये दोनों सममित बंटन हैं। आप यह भी ध्यान दीजिए (आप परिकलन द्वारा सत्यापन कर सकते है) कि प्रत्येक बंटन के लिए समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक के मान अभिन्न है। वस्तुतः प्रत्येक सममित बंटन के लिए, जिसमें आवृत्तियाँ स्थिरता से बढ़ती हों और तब स्थिरता से घटती हों (अर्थात् जो घटाकार हो) । माध्य, माध्यिका और बहुलक अभिन्न होते हैं। ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे बंटनों का रूप, समझने के लिए, निम्न चित्र का अध्ययन कीजिएः



यदि पूर्णतः समकित आंकड़ों के रेखाचित्र को, माध्य में से जाती हुई रेखा पर मोड़ दिया जए, तो वक्र का एक ओर का भाग दूसरी ओर के भाग पर, पूर्णतः संपाती होता है। आप कह सकते हैं कि वक्र का एक ओर का भाग दूसरी ओर के भाग का दर्पण प्रतिबिम्ब है। परन्तु सामान्यतः आवृत्ति बंटन सममित नहीं होते। कुछ अल्पमात्र असममित हो सकते हैं, तो अन्य कुछ बहुत अधिक असममित हो सकते है। निम्न दो असममित (या विषम) बंटनों पर विचार कीजिए :

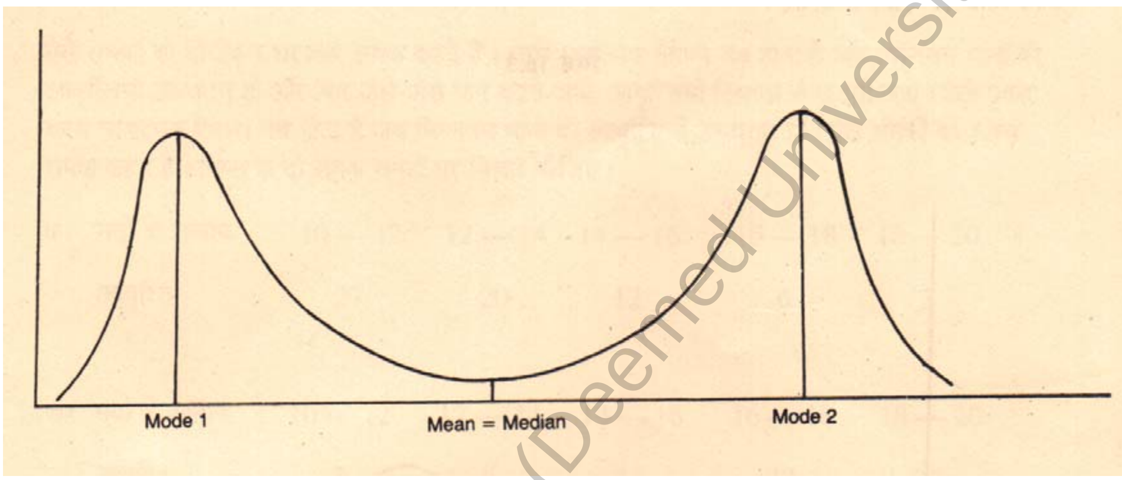
क)	x	:	5-9	9-13	13-17	17-21	21-24
	f	:	7	18	25	15	7
ख)	x	:	5-9	9-13	13-17	17-21	21-24
	f	:	7	28	15	10	2

यहाँ आवृत्तियाँ मध्य के सापेक्ष सममित रूप से वितरति नहीं है। बंटन (क) में, असममिति की मात्रा कम है, जब कि बंटन (ख) में, इसकी मात्रा, तुलनात्मक रूप से अधिक है। शब्द ''वैषम्य'' या ''विषमता'' का प्रयोग, आंकड़ों

में असममिति की मात्रा को प्रकट करने के लिए किया जाता हे। यदि आवृत्तिबंटन सममित न हों तो इसे विषम कहते हैं। यथा शब्द ''वैषम्य'', असममिति को प्रकट करता है, और शब्द ''विषम'' असममित को। अतः एक सममित बंटन का वैषम्य शून्य होता है।

यदि एक बंटन में, आवृत्तियाँ पहले स्थिरता से घटें और फिर स्थिरता से बढ़ें, तो भी, वह बंटन सममित हो सकता है। निम्न बंटनों पर विचार कीजिए :

X	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f	40	27	15	10	15	27	40



अतः हम यह भी कह सकते हैं कि वैषम्य के अध्ययन से अभिप्राय, केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर मदों के वितरण का अध्ययन है। आंकड़ों के वैषम्य विश्लेषण से, निम्न मुख्य प्रयोजन पूरे होते हैंः

1. यह संकेन्द्रण की प्रकृति और मात्रा ज्ञात करने में सहायक होता है। अर्थात् यह ज्ञात करने में कि संकेन्द्रण उच्चतर मानों में अधिक है, या निम्नतर मानों में।
2. माध्य, माध्यिका और बहुलक में, आनुभाविक संबंध, एक परिमित रूप से विषम बंटन पर आधारित है। वैषम्य के माप से प्रकट होगा कि किस सीमा तक, ऐसा आनुभाविक संबंध वैध होता है।
3. वैषम्य का माप, यह ज्ञात करने में सहायक होता हैं कि बंटन सामान्य है या नहीं।

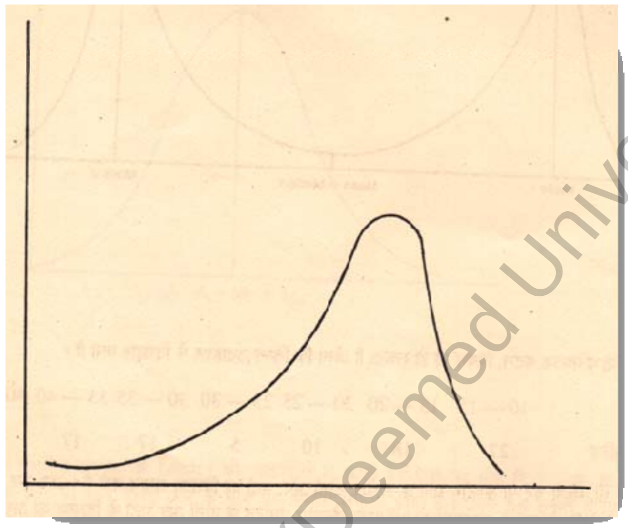
धनात्मक और ऋणात्मक वैषम्य–

जब भी समंक विषम हों तो दो सम्भवनाएँ होती है : (1) वैषम्य धनात्मक है, या (2) वैषम्य ऋणात्मक है। घंटाकार आंकड़ों या एक बहुलक आंकड़ों में, जो कि प्राकृतिक अध्ययनों में सर्वाधिक सामान्य रूप से पाये भी जाते हैं, धनात्मक और ऋणात्मक वैषम्य अर्थात् वैषम्य की दिशा की संकल्पना को समझना सरल है। इस संबंध में, बहुलक एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। बहुलक के दोनों ओर समंकों का फैलाव वैषम्य की दिशा का निश्चय करने में सहायक होता है। नीचे दिए गए दो समंक समूहों पर विचार कीजिए :

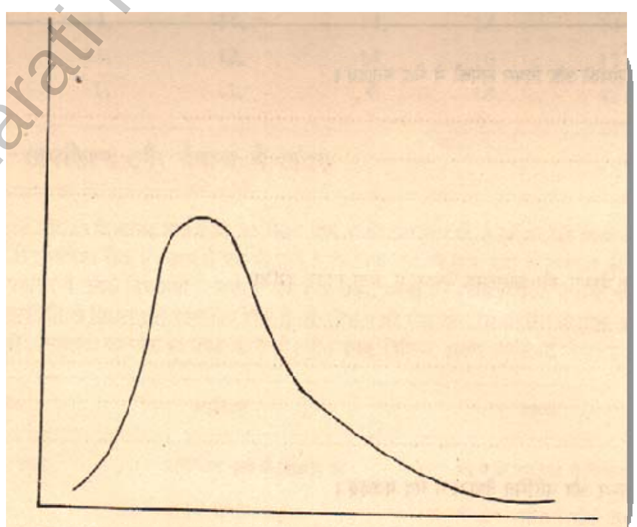
क)	मदः	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16
	आवृत्तिः	5	12	27	10	8	3	1
ख)	मदः	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45

आवृत्तिः 2 5 12 18 30 21 6

समूह (ख) के सदृश, यदि बंटन का पुच्छ भाग छोटे मानों की ओर या बाईं ओर अधिक लम्बा हो, अर्थात् बहुलक के नीचे की ओर समंकों का फैलाव अधिक हो, तो वैषम्य ऋणात्मक या वामावर्त होता है। ऐसी स्थिति में, समांतर माध्य < माध्यिका < बहुलक। ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे आंकड़ों के रूप को समझने के लिए, निम्न चित्र को ध्यान से देखिए।



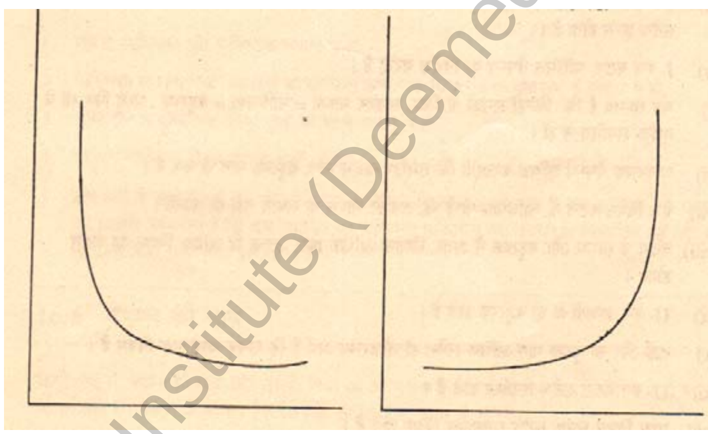
समूह (क) के सदृश यदि बंटन का पुच्छ भाग, बड़े मानों की ओर या दाईं ओर, अधिक लम्बा हो, अर्थात् बहुलक के ऊपर की ओर समंकों का फैलाव अधिक हो, तो वैषम्य धनात्मक या दक्षिणावर्त होता है। ऐसी स्थिति में समांतर माध्य > माध्यिका > बहुलक। ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे आंकड़ों के रूप को समझने के लिए निम्न चित्र को ध्यान से देखिए।



ऐसे समंकों को दीर्घीकृत घंटाकार समंक कहते हैं। चरम धनात्मक वैषम्य तब होता है जब निम्नतम मानों की आवृत्तियाँ उच्चतम हों और फिर जैसे–जैसे मान बढ़ते जाएँ, आवृत्तियाँ स्थिरता से घटती जाएं। इसी प्रकार चरम ऋणात्मक वैषम्य तब होता है जब निम्नतम मानों की आवृत्तियाँ उच्चतम हों। ऐसे समंकों को J रूप समंक कहते हैं। निम्न के दो समंक समूहों पर विचार कीजिए।

क)	मदः	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	आवृत्तिः	27	20	12	6	3
ख)	मदः	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	आवृत्तिः	3	6	12	20	27

समूह (क) में, परम धनात्मक वैषम्य है, जब कि समूह (ख) में, परम ऋणात्मक वैषम्य है। ग्राफ पेपर पर आलेखित उनके रूप, निम्न चित्र (क) और (ख) में प्रदर्शित रूपों के अनुसार होंगे।



अपकिरण और वैषम्य में अंतर–

अपकिरण श्रेणी के केन्द्रीय माप से, उसके मदों के बिखराव, फैलाव या विचलन से सम्बन्धित होता है। आपको यह भी ज्ञात है कि अपकिरण की माप, मदों के बिखराव की मात्रा या केन्द्रीय प्रवृत्ति में उनके विचलनों के समांतर माध्य को प्रकट करती है। इसके विपरीत वैषम्य, मदों की एक श्रेणी के सममिति से विचलन से सम्बन्धित होता है और वैषम्य की माप, केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर, मदों के वितरण की असंतुलता की मात्रा को प्रकट करती हैं। नीचे इनके विशिष्ट लक्षण सारणीबद्ध किए गए हैं :

पक्ष	अपकिरण	वैषम्य
1. मापन	(1) व्यक्तिगत मानों के बिखराव का (2) मानों के केन्द्रीय प्रवृत्ति से से विचलन का	(1) बंटन के सममिति से विचलन का (2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर मदों के वितरण की प्रकृति का

2. आगणन	तीन माध्यों : समांतर माध्य, माध्यिका और बहुलक में से किसी एक के प्रतिनिधित्विता का	तीन माध्यों : समांतर, माध्य, माध्यिका और,भूयिष्ठक में से किन्हीं दो के अंतर का
3. सममित बंटन की स्थिति में	कोई भी मान हो सकता है	मान शून्य हो सकता है
4. उपयोगिता	समंकों के विचरण को ज्ञात करने में सहायक होता है	आवृत्तियों का संकेन्द्रण उच्च मानों में अधिक है, या निम्नतर मानों में, यह ज्ञात करने में सहायक होता है।

वैषम्य के परीक्षण–

हम यह कैसे बता सकते हैं कि कोई विशेष बंटन विषम है या नहीं। हम कहेंगे कि एक बंटन में वैषम्य विद्यमान है यदि इसमें निम्न लक्षण हो :

1. माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक संपाती न हो।
2. माध्यिका से धनात्मक विचलनों का योगफल ऋणात्मक विचलनों के योगफल के समान न हो।
3. भूयिष्ठक के दोनों ओर आवृत्तियों का बंटन समान न हो
4. चतुर्थक माध्यिका से समदूरस्थ न हों, अर्थात् Q_3 - M_d और M_d - Q_1 असमान हो।
5. जब श्रेणी के सभी प्रेक्षणों को, ग्राफ पेपर पर आलेखित किया जाए और तब वे एक सममित वक्र प्रदान न करें। इससे अभिप्राय है कि जब रेखाचित्र को माध्यिका या माध्य पर, उर्ध्वाधार विभाजित करें और तह दें तो दोनों आधे भाग पूर्णतः संपाती न हों।

वैषम्य की माप–

किसी श्रेणी में, वैषम्य की मात्रा और उसकी दिशा का अध्ययन करने के लिए वैषम्य के विभिन्न मापों का प्रयोग किया जाता है। वैषम्य के ये माप निरपेक्ष और सापेक्ष दोनों प्रकार के हो सकते हैं।

निरपेक्ष माप–

निरपेक्ष माप हमें बताते हैं कि असममिति कितनी है और वह धनात्मक है, या ऋणात्मक।

वैषम्य की पहली निरपेक्ष माप, माध्य और भूयिष्ठक के या माध्य और माध्यिका के अंतर पर आधारित होती है। प्रतीक रूप में, (1) निरपेक्ष वैषम्य sk= माध्य–भूयिष्ठक, या (2) निरपेक्ष वैषम्य sk= माध्य–माध्यिका। यदि माध्य का मान, भूयिष्ठक या माध्यिका के मान से बढ़ा हो, तो वैषम्य धनात्मक होता है अन्यथा यह ऋणात्मक होता है। ध्यान दीजिए कि एक धनात्मक विषम बंटन में, तीनों माध्यों में, समांतर माध्य का मान अधिकतम और भूयिष्ठक का मान न्यूनतम होता है। इसी प्रकार, एक ऋणात्मक विषम बंटन में, भूयिष्ठक का मान अधिकतम और समांतर माध्य का मान न्यूनतम होता है। दोनों स्थितियों में, माध्यिका, माध्य और भूयिष्ठक के बीच में होती है।

वैषम्य का दूसरा निरपेक्ष माप, चतुर्थकों पर आधारित है और इस तथ्य पर आधारित है कि सामान्यतः एक सममित बंटन में Q_1 और Q_3 माध्यिका से सम–दूरस्थ होते हैं, अर्थात् $Q_3-M_d = M_d - Q_1$ परंतु, यदि बंटन असममित हो, तो अधिक लम्बे पुच्छ भाग की ओर स्थित चतुर्थक, दूसरे चतुर्थक की तुलना में, माध्यिका से अधिक दूरी पर होगा। ऐसी स्थिति में, वैषम्य का निरपेक्ष माप, डॉ. बाउले के निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त कर सकते हैं :

निरपेक्ष वैषम्य $sk_Q = (Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1) = Q_3 + Q_1 - 2M_d$

सूत्र से स्पष्ट होता है कि यदि $(Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)$ से बड़ा हो तो वैषम्य धनात्मक है, अन्यथा यह ऋणात्मक है। ऐसा इसलिए, क्योंकि $Q_3 - M_d > M_d - Q_1$ सूचित करता है कि Q_3 और M_d का अंतर, M_d और Q_1 के अंतर से बड़ा है। इससे अभिप्राय है कि Q_3 की ओर या दाईं ओर का पुच्छ भाग अधिक लम्बा है, अर्थात् वैषम्य दक्षिणावर्त या धनात्मक है।

सापेक्ष माप—दो या दो से अधिक बंटनों के वैषम्य की तुलना करने के उद्देश्य से, निर्दिष्ट श्रेणियों या बंटनों के लिए, वैषम्य गुणांक का परिकलन किया जाता है। सापेक्ष वैषम्य मापने की दो महत्वपूर्ण विधियाँ नीचे दी गई हैः

1. कार्ल पियरसन का वैषम्य गुणांक : वैषम्य मापने के लिएए इस विधि का प्रयोग बहुधा किया जाता है, और यह पहले निरपेक्ष माप पर आधारित है। वैषम्य मापने के लिए सूत्र इस प्रकार हैः

$$S_k = (\bar{X} - Z) / \sigma$$

अर्थात् वैषम्य के पहले निरपेक्ष माप को मानक विचलन से भाजित किया जाता है। इस प्रकार, यह मान, समंकों की इकाइयों से मुक्त होगा। सममित बंटन के लिए, इस गुणांक का मान शून्य होगा। यदि माध्य भूयिष्ठक से बड़ा हो तो वैषम्य धनात्मक होगा, अन्यथा ऋणात्मक । व्यवहार में, इस गुणांक का मान, प्रायः ± 3 के बीच होता है।

यदि भूयिष्ठक सुपरिभाषित न हो तो निम्न सन्निकट संबंध का प्रयोग किया जाता है।

भूयिष्ठक = 3 (माध्यिका) − 2 (माध्य)

वैषम्य के लिए, उपरोक्त सूत्र, निम्न लघुकृत रूप ले लेता है :

$$S_k = 3(\bar{X} - M) / \sigma$$

टिप्पणी : क्योंकि माध्य और मानक विचलन के परिकलन में, समंकों के सभी मदों का प्रयोग होता है, इसलिए वैषम्य मापने की, कार्ल पियरसन की विधि, समंकों के सभी मदों का प्रयोग करती है।

2. डॉ. बाउले का वैषम्य गुणांक : वैषम्य मापने के लिए इस विधि का प्रयोग भी किया जाता है, और यह दूसरे निरपेक्ष माप पर आधारित है। वैषम्य मापने के लिए सूत्र इस प्रकार हैः

$$S_k^Q = (Q_3 + Q_1 - 2M) / (Q_3 - Q_1)$$

आइये अब कुछ उदाहरणों से वैषम्य के परिकलन की विधियों का अभ्यास करेंः—

उदाहरण 16

निम्न मानों से विषमता एवं उसके गुणांक को परिकलित कीजिए :

3, 4, 6, 7, 15, 25

हल :

आकार (x)	$d = (X - \bar{X})$	d^2
3	-7	49
4	-6	36
6	-4	16
6	-4	16

15	5	25
26	16	256
$\sum x = 60$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 398$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} =$$

$$\bar{X} = \frac{60}{6} = 10$$

भूयिष्ठक

अवर्गीकृत श्रेणी में जो संख्या सर्वाधिक दोहरायी जाती है, वही भूयिष्ठक है, अर्थात् Z = 6

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{398}{6}}$$

$$\sigma = \sqrt{66.33}$$

$$\sigma = 8.144$$

विषमता

$$sk = (\bar{X} - Z)$$

$$sk = 10 - 6 = 4$$

और अब विषमता का गुणांक

$$J = (\bar{X} - Z) / \sigma$$

$$J = (10 - 6) / 8.144$$

$$J = 4 / 8.144$$

$$J = 0.4912$$

उदाहरण 17

निम्न मानों से विषमता एवं उसके गुणांक को परिकलित कीजिए :

Marks	0-25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150-175
No. of students	10	9	5	0	10	4	2

हलः

भूयिष्ठक

निरीक्षण द्वारा पता चल रहा है कि सर्वाधिक आवृत्ति 10 दो बार आ रही है अतः भूयिष्ठक स्पष्ट नहीं है, फिर भी समूहन और विश्लेषण द्वारा इसकी जांच करें–

प्राप्तांक Marks (x)	विद्यार्थियों की संख्या No. of students (*f*) i	ii	iii	iv	v	vi	विश्लेषण	
0-25	$\boxed{10}$	$\boxed{19}$					III	3
25-50	9		$\boxed{14}$	$\boxed{24}$			III	3
50-75	5				14		III	3
75-100	0	5				$\boxed{15}$	I	1
100-125	$\boxed{10}$		10	14			III	3
125-150	4	14			$\boxed{16}$		I	1
150-175	2		6					

आपने देखा कि सर्वाधिक मिलान दंडिकाएँ 3 हैं जो भी चार बार आया है अतः भूयिष्ठक स्पष्ट नहीं है। अब विषमता की गणना वैकल्पिक सूत्र से करनी होगी।

प्राप्तांक	विद्यार्थी (*f*)	संचयी आवृत्ति (*cf*)	मध्य मान (x)	dx = (X-A)/i A=112.5 i=25	*f*.dx	*f*.dx² = *f*dx.dx
0-25	10	10	12.5	-4	-40	160
25-50	9	19	37.5	-3	-27	81
50-75	5	24	62.5	-2	-10	20
75-100	0	24	87.5	-1	0	0
100-125	10	34	112.5	0	0	0
125-150	4	38	137.5	1	4	4
150-175	2	40	162.5	2	4	8
	$\sum f = 40$			$\sum dx = -7$	$\sum f.dx = -69$	$\sum f.dx^2 = 273$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = A + \qquad X\ i$$

$$\bar{X} = 112.5 + \frac{69}{40} X\ 25$$

$$\bar{X} = 112.5 - 43.125$$

$$\bar{X} = 69.375$$

$$\bar{X} = 69.38$$

माध्यिका

$$m = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } \left(\frac{40}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } 20^{th} \text{ item}$$

अर्थात् 20 वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 24 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 50—75 को माध्यिका का वर्ग माना जायेगा। अब इस माध्यिका वर्ग का निर्धारण करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा निर्धारित किया जा सकता है।

$$M_d = L + \frac{i}{f} \text{ x } (m - c)$$

$$M_d = 50 + \frac{25}{5} \text{ x } (20 - 19)$$

$$M_d = 50 + \frac{25}{5} \text{ x } 1$$

$$M_d = 50 + 5$$

$$M_d = 55$$

मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{\qquad\qquad} \text{ X c or i}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{273}{40}\right) - \left(\frac{-69}{40}\right)^2} \text{ X } 25$$

$$\sigma = \sqrt{(6.825) - (-1.725)^2} \text{ X } 25$$

$$\sigma = \sqrt{6.825 - 2.9756} \text{ X } 25$$

$$\sigma = \sqrt{3.8494} \text{ X } 25$$

$$\sigma = 1.9620 \text{ X } 25$$

$$\sigma = 49.05$$

विषमता

$$sk = 3(\bar{X} - M)$$

$$sk = 3(69.38 - 55) = 43.14$$

और अब मानक विषमता का गुणांक

$$J = 3(\bar{X} - M)/\sigma$$

$$J = 3(69.38 - 55)/49.05$$

$$J = 43.14/49.05$$

$$J = 0.8795$$

उदाहरण 18

निम्न मानों से डॉ. बाउले की चतुर्थकों पर आधारित विषमता एवं उसके गुणांक को परिकलित कीजिए :

प्राप्तांक (से कम)		10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या	4	16	40	76	96	112	120	125	

हलः

चूंकि श्रेणी 'से कम' रुप में है, अतः उसे पहले वर्गान्तरों में निम्न प्रकार बदला जायेगा–

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)	प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (*f*)
10 से कम	4	0-10	4
20 से कम	16	10-20	16-4=12
30 से कम	40	20-30	40-16=24
40 से कम	76	30-40	76-40=36
50 से कम	96	40-50	96-76=20
60 से कम	112	50-60	112-96=16
70 से कम	120	60-70	120-112=8
80 से कम	125	70-80	125-120=5
			$\sum f = 125$

यदि श्रेणी 'से कम' रुप में होती है, तो आवृत्तियां स्वतः संचयी आवृत्तियों के रुप में होती हैं। जैसा कि उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है। अतः अब सीधे ही विभाजन मानों की गणना करेंगेः

प्रथम चतुर्थक

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{item}$$

$$q_1 = \text{Size of } \left(\frac{125}{4}\right)^{th} \text{item}$$

$$q_1 = \text{Size of } 31.25^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 40 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 20–30 को प्रथम चतुर्थक वर्ग माना जायेगा। अब इस वर्ग का निर्धारण करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा निर्धारित किया जा सकता है।

$$Q_1 = L + \frac{i}{f} \times (q_1 - c)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{24} \times (31.25 - 16)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{10}{24} \times (15.25)$$

$$Q_1 = 20 + \frac{152.5}{24}$$

$$Q_1 = 20 + 6.35$$

$$Q_1 = 26.35$$

इसी प्रकार **तृतीय चतुर्थक**

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{N}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{125}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } \left(\frac{375}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$q_3 = \text{Size of } 93.75^{th} \text{ item}$$

इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 96 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 40–50 को तृतीय चतुर्थक वर्ग माना जायेगा। अब

$$Q_3 = L + \frac{i}{f} \times (q_3 - c)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{10}{20} \times (93.75 - 76)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{10}{20} \times (17.75)$$

$$Q_3 = 40 + \frac{177.5}{20}$$

$$Q_3 = 40 + 8.875$$

$$Q_3 = 48.875 = 48.88$$

इसी प्रकार **माध्यिका**

$$m = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } \left(\frac{125}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$m = \text{Size of } 62.5^{th} \text{ item}$$

अर्थात् **62.5** वें मद का मान, इस मान को संचयी आवृत्तियों में खोजेंगे। संचयी आवृत्ति 76 में यह मान सर्वप्रथम प्राप्त होगा, उसी के आकार को अर्थात् 30–40 को माध्यिका का वर्ग माना जायेगा। अब इस माध्यिका वर्ग का निर्धारण करने के पश्चात् चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा निर्धारित किया जा सकता है।

$$M_d = L + \frac{i}{f} \times (m - c)$$

$$M_d = 30 + \frac{10}{36} \times (62.5 - 40)$$

$$M_d = 30 + \frac{10}{36} \times 22.5$$

$$M_d = 30 + \frac{225}{36}$$

$$M_d = 30 + 6.25 = 36.25$$

विषमता

$$sk_Q = (Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)$$

$$sk_Q = Q_3 + Q_1 - 2M_d$$

$$sk_Q = 48.88 + 26.35 - 2(36.25)$$

$$sk_Q = 75.23 - 72.50$$

$$sk_Q = 2.73$$

और अब विषमता का गुणांक

$$J^Q = (Q_3 + Q_1 - 2M) / (Q_3 - Q_1)$$

$$J^Q = 48.88 + 26.35 - 2(36.25) / 48.88 - 26.35$$

$$J^Q = 75.23 - 72.50 / 22.53$$

$$J^Q = 2.73 / 22.53$$

$$J^Q = 0.1211$$

सारांश–

केन्द्रीय प्रवृत्ति और विचरण की माप, किसी समंक समूह के सभी लक्षणों को प्रकट नहीं करती। यह सम्भव है कि दो समंक समूहों के माध्य और मानक विचलन अभिन्न हों, परंतु उनके बंटन रूप के विचार से बहुत भिन्न हों। यदि समंकों का बंटन सममित नहीं है तो इसे असममित या विषम बंटन कहते हैं। वैषम्य, बंटन में सममिति के अभाव का निर्देश करता है। बहुत अधिक विषम समंकों में, उच्चतम आवृत्ति एक चरम मान से संबन्धित होती है। धनात्मक विषम बंटन का उसके दाईं ओर एक लम्बा पुच्छ भाग होता है और (इसलिए) इसपे दक्षिणावर्त विषम बंटन भी कहते हैं। ऋणात्मक विषम समंकों का उनके बाईं ओर एक लम्बा पुच्छ भाग होता है और इसलिए उन्हें वामावर्त विषम भी कहते हैं।

अभ्यास प्रश्न 1 निम्न से कार्ल पीयर्सन के वैकल्पिक सूत्र से विषमता गुणांक की गणना कीजियेः–

नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक	नामांक	प्राप्तांक
1041	87	1046	47	1051	69
1042	38	1047	15	1052	55
1043	52	1048	28	1053	24
1044	75	1049	80	1054	36
1045	63	1050	71	1055	38

अभ्यास प्रश्न 2 निम्न समंकों से डॉ. बाउले के चतुर्थक विषमता गुणांक की गणना कीजियेः–

माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि	माह	लाभ / हानि
जनवरी	10000	मई	-8000	सितंबर	4000
फरवरी	18000	जून	100	अक्तूबर	8000
मार्च	0	जुलाई	400	नवंबर	12000
अप्रेल	-2500	अगस्त	1000	दिसंबर	20000

अभ्यास प्रश्न 3 निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक एवं डॉ. बाउले के चतुर्थक विषमता गुणांक की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति		
5	10	10	172
6	33	11	124
7	70	12	61
8	110	13	32
9	176	14	12
		योग	800

अभ्यास प्रश्न 4 निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक की गणना कीजियेः–

प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक (70 में से)	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	10	40-50	12
20-30	20	50-60	8
20-30	30	60-70	5
30-40	15	Total	100

अभ्यास प्रश्न 5 निम्न से कार्ल पीयर्सन एवं डॉ. बाउले के विषमता गुणांकों की गणना कीजियेः–

आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति	आकार	आवृत्ति
0-9	2	40-49	12	80-89	2
10-19	3	50-59	8	90-99	1
20-29	6	60-69	5	योग	50
30-39	8	70-79	3		

अभ्यास प्रश्न 6 निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन के वैकल्पिक सूत्र से विषमता गुणांक की गणना कीजियेः–

मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या	मजदूरी	श्रमिकों की संख्या
75-80	5	55-60	7	35-40	7
70-75	7	50-55	12	30-35	7
65-70	15	45-50	18	25-30	8
60-65	18	40-45	5	20-25	4

अभ्यास प्रश्न 7 निम्न समंकों से डॉ. बाउले के चतुर्थक विषमता गुणांक की गणना कीजियेः—

केन्द्रीय आकार	आवृत्ति	केन्द्रीय आकार	आवृत्ति
14	1	22	37
16	7	24	29
18	10	26	9
20	44	28	3

अभ्यास प्रश्न 8 निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन के सूत्र से विषमता गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5	60 से कम	124
20 से कम	25	70 से कम	168
30 से कम	50	80 से कम	202
40 से कम	78	90 से कम	238
50 से कम	96	100 से कम	240

अभ्यास प्रश्न 9 निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन के सूत्र से विषमता गुणांक की गणना कीजियेः—

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
80% से कम	100	40% से कम	32
70% से कम	90	30% से कम	20
60% से कम	80	20% से कम	13
50% से कम	60	10% से कम	5

अभ्यास प्रश्न 10 निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक एवं डॉ. बाउले के चतुर्थक विषमता गुणांक की गणना कीजियेः—

उपज lbs. में	खेतों की संख्या				
		120 से अधिक	156	300 से अधिक	31
0 से अधिक	216	180 से अधिक	98	360 से अधिक	13
60 से अधिक	210	240 से अधिक	57	420 से अधिक	7

वर्ग (Section) C

अध्याय (Chapter) 1

सह - सम्बन्ध

(Correlation)

१. परिचय

२. सह-सम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषाएं

३. सह-सम्बन्ध की विशेषताएँ

४. कारण-कार्य सम्बन्ध

५. सह-सम्बन्ध के प्रकार

६. सह-सम्बन्ध का परिमाण

७. सह सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियां

विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र विधि

साधारण रेखाचित्र विधि

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणक विधि

प्रत्यक्ष विधि

अप्रत्यक्ष/लघु विधि

संगामी विचलन विधि

८. द्विचर आवृत्ति बंटन/वर्गीकृत संमकों में सह-सम्बन्ध गुणक की गणना

९. मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव

१०. सम्भाव्य विभ्रम

११. प्रमाप विभ्रम

१२. स्पियरमैन की कोटि अन्तर विधि

१३. संगामी विचलन विधि

१४. काल श्रेणी में सह-सम्बन्ध

१५. विलम्बन तथा अग्रगमन

१६. अभ्यासार्थ प्रश्न

वर्ग (Section) C
अध्याय (Chapter) 1
सह - सम्बन्ध
(Correlation)

परिचय (Introduction)

अब तक आपने पूर्व के अध्यायों में एक चरीय आवृति वितरण का अध्ययन किया है जो कि श्रेणियों का सीमित विश्लेषण मात्र ही है। इस अध्ययन में समंकों की सीमित मात्रात्मक विशेषताओं की चर्चा दी गयी है। सह-सम्बन्ध तकनीक के अध्ययन का उद्देश्य विभिन्न संमक समूहों के मध्य विश्लेषणात्मक सम्बन्ध का पता लगाना है। दो श्रेणियों में साथ-साथ परिवर्तन होने की प्रवत्ति का अध्ययन सह-सम्बन्ध विश्लेषण द्वारा किया जाता है।

सह-सम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषाएं (Meaning and Definitions of Correlation)

अर्थ (Meaning)

जब दो समंक-श्रेणियों में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक समंक श्रेणी में परिवर्तन होने पर दूसरी समंक श्रेणी में भी उसी दिशा में या विपरीत दिशा में परिवर्तन हो जाये तो इस सह-परिवर्तन के गणितीय माप को सह-सम्बन्ध कहा जाता है।

परिभाषाएं (Definitions)

विभिन्न विद्वानों ने सह-सम्बन्ध की अनेक परिभाषाएँ दी है-

प्रो. किंग के अनुसार, ''यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर-मूल्य (Variables) सदैव एक ही दिशा में या परस्पर विपरीत दिशा में घटने या बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थिति में यह समझा जाना चाहिए कि उनमें एक निश्चित सम्बन्ध है। उसी सम्बन्ध को सह-सम्बन्ध कहते है।''

बाउले के अनुसार,''जब दो संख्याएँ इस प्रकार सम्बन्धित हो कि एक का परिवर्तन दूसरे के परिवर्तन की सहानुभूति में हो, जिससे एक की कमी या वृद्धि, दूसरे की कमी या वृद्धि से सम्बन्धित हो या विपरीत हो और एक में परिवर्तन की मात्रा दूसरे के परिवर्तन की मात्रा के समान हो, तो दोनों मात्राएँ सह-सम्बन्ध कहलाती है।''

प्रो. बोडिंगटन के अनुसार, ''जब कभी दो या दो से अधिक समूहों, वर्गों अथवा समंक श्रेणियों में सुनिश्चित संयोग विद्यमान हो तो उनमें सह-सम्बन्ध का होना कहा जाता है।''

इस प्रकार सह-सम्बन्ध दो या दो से अधिक सम्बन्धित चरों के मध्य सम्बन्ध की सीमा को कहते है। यह चरों के मध्य निश्चित सम्बन्ध की मात्रा का माप है।

सह-सम्बन्ध की विशेषताएँ (Properties of Correlation)

१. सह-सम्बन्ध विश्लेषण का उद्देश्य विभिन्न चरों के मध्य सम्बन्ध स्थापित करता है।

२. इसका उद्देश्य चरों के मध्य सम्बन्ध की मात्रा का मापन करना है।

कारण-कार्य सम्बन्ध (Cause and Effect Relationship)

जब एक समंक श्रेणी में हुए परिवर्तन दूसरी समंक श्रेणीं में हुए परिवर्तनों का कारण बन जाते है तो यह माना जाता है कि दोनों चरों में कारण-कार्य सम्बन्ध है तथा दोनों चरों के मध्य का सम्बन्ध सार्थक है। उदाहणार्थ, एक वस्तु के मूल्यों में वृद्धि हुई हो तथा इस मूल्य वृद्धि के कारण उस वस्तु की माँग में कमी आयी हो, तब यह कहा जा सकता है कि वस्तु के मूल्य एवं माँग में कारण-कार्य सम्बन्ध है। चरों के मध्य जब कारण-कार्य सम्बन्ध होता है तब ही परिकलित सह-सम्बन्ध महत्वपूर्ण या सार्थक माना जाता है।

कारण-कार्य सम्बन्ध के बिना सह-सम्बन्ध केवल साहचर्य (Association) या सह-विचरण (Co-Variance) को ही स्थापित करता है जो अर्थहीन भी हो सकता है। ऐसे सह-सम्बन्ध को भ्रामक सह-सम्बन्ध (Spurious Correlation) कहा जाता है।

सह-सम्बन्ध के प्रकार (Types of Correlation)

सह-सम्बन्ध को निम्न तीन वर्गों में बांटा जा सकता है:

(i) धनात्मक तथा ऋणात्मक सह-सम्बन्ध

(ii) सरल, बहुगुणी तथा आंशिक सह-सम्बन्ध

(iii) रेखीय तथा वक्र-रेखीय सह-सम्बन्ध

१. धनात्मक तथा ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Positive and Negative Correlation)-

जब दो चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो अर्थात् एक चर में वृद्धि होने पर दूसरे चर में भी वृद्धि हो तथा एक चर में कमी होने पर दूसरे चर में भी कमी हो, तो ऐसे सह-सम्बन्ध को धनात्मक सह-सम्बन्ध कहते हैं, जैसे- माँग एवं मूल्य में सह-सम्बन्ध।

जब दो चरों में परिवर्तन विपरीत दिशा में हों, अर्थात् एक चर में वृद्धि होने पर दूसरे चर में कमी हो अथवा एक चर में कमी होने पर दूसरे चर में वृद्धि हो, तो ऐसे सह-सम्बन्ध को ऋणात्मक सह-सम्बन्ध कहते हैं, जैसे- पूर्ति एवं मूल्य में सह-सम्बन्ध।

निम्न उदाहरणों से धनात्मक एवं ऋणात्मक सह-सम्बन्ध में अन्तर स्पष्ट हो जायेगा:

धनात्मक सह-सम्बन्ध (Positive Correlation) का उदाहरण-

दोनों चर मूल्यों में वृद्धि होने पर	
मूल्य (रू.)	पूर्ति (इकाइयाँ)
७७	११,३७५
७८	१२,०००
९९	२२,५००
११०	२३,०००
१११	२३,५००
११२	२४,०००

ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Negative Correlation) का उदाहरण-

एक चर में वृद्धि तथा दूसरे चर में कमी होने पर	
मूल्य (रू.)	माँग(इकाइयाँ)
७७	११,७५०
७८	११,६५०
७९	११,५००
८०	११,३५०
८१	११,२००
८२	११,१००

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि मूल्य एवं पूर्ति में धनात्मक सह-सम्बन्ध है जबकि मूल्य एवं माँग में ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है।

२. सरल, बहुगुणी तथा आंशिक सह–सम्बन्ध (Simple, Multiple and Partial Correlation)-

स्वतंत्र एवं आश्रित चरों की संख्या के आधार पर सह–सम्बन्ध सरल, बहुगुणी तथा आंशिक हो सकता है।

सरल सह–सम्बन्ध (Simple Correlation)- दो चरों के मध्य सह–सम्बन्ध को सरल सह–सम्बन्ध कहा जाता है।

बहुगुणी सह–सम्बन्ध (Multiple Correlation)- जब एक आश्रित चर पर दो से अधिक स्वतंत्र चरों के सम्मिलित प्रभाव का अध्ययन करना हो, तब ऐसे सह–विचरण को बहुगुणी सह–सम्बन्ध कहा जाता है।

आंशिक सह–सम्बन्ध (Partial Correlation)- जब दो या दो से अधिक स्वतंत्र चरों के मध्य सह–विचरण का अध्ययन किया जावे एवं एक चर के प्रभाव को स्थिर रखकर केवल दो चर मूल्यों के बीच सह–सम्बन्ध ज्ञात किया जावे तो ऐसे सह–सम्बन्ध को आंशिक सह–सम्बन्ध कहा जाता है।

उदाहरण के लिए , जब खाद के उपयोग की मात्रा तथा गेहूं के उत्पादन की मात्रा के मध्य सह–विचरणों का मापन किया जाये तो ऐसे सह–विचरण का गणितीय माप सरल सह–सम्बन्ध कहलाता है। यदि वर्षा एवं खाद की मात्रा दोनों के कारण गेहूं की उत्पादन मात्रा में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन किया जाये तो यह बहुगुणी सह–सम्बन्ध कहलाता है। यदि वर्षा एवं खाद की मात्रा में एक चर (वर्षा की मात्रा) को स्थिर मानकर खाद की मात्रा एवं गेहूं के उत्पादन की मात्रा के मध्य सह–सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो ऐसे सह–सम्बन्ध को आंशिक सह–सम्बन्ध कहा जाता है।

३. रेखीय तथा वक्र–रेखीय सह–सम्बन्ध (Linear and curvilinear Correlation)-

यदि दो चरों के मध्य परिवर्तन का अनुपात स्थिर रहता है तो ऐसा सह–सम्बन्ध रेखीय सह–सम्बन्ध कहलाता है। यदि इसे रेखा–चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जावे तो ग्राफ पर एक सीधी रेखा बनेगी। चरों के मध्य रेखीय सह–सम्बन्ध को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है:

$$Y = a + bX$$

यदि दो चरों के मध्य परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं रहता है तो ऐसा सह–सम्बन्ध वक्र–रेखीय सह–सम्बन्ध कहलाता है। यदि इसे रेखा–चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जावे तो एक वक्र रेखा बनेगी। वक्र रेखीय सह–सम्बन्ध सामाजिक तथा आर्थिक क्षेत्रों से सम्बन्धित समंकों में पाया जाता है। वक्र रेखीय सह–सम्बन्ध को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है:

$$Y= a+ bX + cX^2$$

सह–सम्बन्ध का परिमाण (Degree of Correlation)

सह–विचरण का संख्यात्मक मान सह–सम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहलाता है। इसे अंग्रेजी के 'r' से प्रदर्शित किया जाता है। सह–सम्बन्ध गुणांक (r) को धनात्मक (+) या ऋणात्मक (-) चिन्हों के साथ प्रदर्शित किया जाता है।

सह–सम्बन्ध की मात्रा का अध्ययन सह–सम्बन्ध गुणांक के आधार पर किया जाता है। सह–सम्बन्ध की मात्रा निम्न प्रकार की हो सकती है:

१. पूर्ण सह–सम्बन्ध

२. सह–सम्बन्ध की सीमित मात्रा

(अ) उच्च स्तरीय सह–सम्बन्ध

(ब) मध्यम स्तरीय सह–सम्बन्ध

(स) निम्न स्तरीय सह–सम्बन्ध

३. सह–सम्बन्ध की अनुपस्थिति

सह–सम्बन्ध गुणांक के मान के आधार पर सह–सम्बन्ध के परिणाम का निर्वचन निम्न प्रकार किया जा सकता है:

यदि: r = +1	: पूर्ण धनात्मक सह–सम्बन्ध
r = - 1	: पूर्ण ऋणात्मक सह–सम्बन्ध
r = +0.75 या अधिक परन्तु +1 से कम	: उच्च स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध
r = - 0.75 या अधिक परन्तु - 1 से कम	: उच्च स्तरीय ऋणात्मक सह–सम्बन्ध
r = +0.25 या अधिक परन्तु +0.75 से कम	: मध्यम स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध
r = - 0.25 या अधिक परन्तु - 0.75 से कम	: मध्यम स्तरीय ऋणात्मक सह–सम्बन्ध
r = 0 से अधिक परन्तु +0.25 से कम	: निम्न स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध
r = 0 से अधिक परन्तु - 0.25 से कम	: निम्न स्तरीय ऋणात्मक सह–सम्बन्ध
r = 0	: सह–सम्बन्ध की अनुपस्थिति

सह–सम्बन्ध गुणक का मान

सह–सम्बन्ध का परिमाण (Degree of Correlation)	धनात्मक सह–सम्बन्ध (Positive Correlation)	ऋणात्मक सह–सम्बन्ध (Negative Correlation)
पूर्ण (Perfect)	+1	-1
उच्च स्तरीय (High Degree)	+.७५ से +१ के मध्य	–.७५ से –१ के मध्य
मध्य–स्तरीय (Moderate degree)	+.२५ से +७५ के मध्य	–.२५ से –.७५ के मध्य
निम्न–स्तरीय (Low degree)	+.० से +.२५ के मध्य	–.० से –.२५ के मध्य
सह–संबंध का पूर्णतः अभाव (No Correlation)	०	०

टिप्पणी– संख्यात्मक प्रश्नों का हल करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि सह–संबंध गुणक मूल्य प्रत्येक दशा में ० तथा ± १ के मध्य होगा।

सह सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियां
(Methods of Determining Correlation)

सह संबंध ज्ञात करने की प्रमुख रीतियों को अग्रांकित चार्ट द्वारा सरलता से समझा जा सकता है:–

सह–सम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ

- बिन्दु–रेखीय रीतियाँ (Graphic Methods)
  - विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)
  - साधारण बिन्दु रेखीय रीति (Simple Graphic Method)
- गणितीय रीतियाँ (Mathematical Methods)
  - कार्ल पियर्सन (Karl Pearson's)
  - स्पियरमैन की क्रमान्तर रीति (Speaman's)
  - संगामी विचलन रीति (Concurret Deviation)
  - अन्य रीतियाँ (Others)

विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र
(Scatter Diagram or Dot Diagram)

दो समंक श्रेणियों में सहसंबंध की दिशा तथा मात्रा का अनुमान विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) की सहायता से किया जा सकता है। इस विधि के अनुसार स्वतन्त्र चर-मूल्यों X-(Independent Variabies) को रेखाचित्र के भुजाक्ष (X-axis) पर तथा तत्संबंधी आश्रित चर-मूल्यों (Dependent Variables)-Y को कोटि अक्ष (Y-axis) पर अंकित किया जाता है। X तथा Y दोनों समंक श्रेणियों के प्रत्येक पद-युग्म (Pairs of Items) के लिए एक-एक बिन्दु अंकित किया जाता है। इस प्रकार समंक श्रेणी में जितने पद-युग्म या जोड़े होंगे उतने ही बिन्दु ग्राफ पत्र पर अंकित हो जाएंगे। विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दुओं को देखने पर चर-मूल्यों की एक निश्चित प्रवृत्ति का आभास हो जाता है। इन बिन्दुओं को रेखा से जोड़ा नहीं जाता है। यदि विभिन्न बिन्दुओं का प्रवाह बायीं ओर निचले कोने से दाहिनी तरफ ऊपर वाले कोने की ओर है तो धनात्मक सहसंबंध तथा यदि विभिन्न बिन्दुओं का प्रवाह बायीं ओर के ऊपर वाले कोने से दाहिनी ओर के निचले कोने की तरफ गिरता हुआ है तो यह ऋणात्मक सहसंबंध का सूचक है। यदि विभिन्न बिन्दुओं का प्रवाह कोई प्रवृत्ति नहीं बताता अर्थात् वे एक-दूसरे से असम्बद्ध हैं या दाएँ-बाएँ, ऊपर-नीचे, इधर-उधर बिखरे हुए हों तो यह सह संबंध की अनुपस्थिति का सूचक है। ऐसी दशा में दोनों चरों के मध्य सह संबंध का अभाव माना जाता है। विक्षेप चित्र से दो चरों के मध्य रेखीय एवं वक्र रेखीय सह-संबंध का अनुमान लगाया जा सकता है।

साधारण रेखाचित्र विधि
(Simple Graphic Method)

साधारण रेखा-चित्र के माध्यम से भी सह संबंध का अनुमान लगाया जा सकता है। रेखा-चित्र पर दोनों समंक-श्रेणियों के विभिन्न मूल्यों को अंकित कर विभिन्न बिन्दुओं को एक दूसरे से क्रमानुसार मिला दिया जाता है। इस प्रकार दोनों चरों की दो रेखाऐं प्राप्त होंगी। यदि दोनों रेखाएं समान्तर तथा बायीं ओर से उठ कर दायीं ओर जाती हों तो उन दोनों चरों में धनात्मक सहसंबंध होता है। यदि दोनों रेखाएं विपरीत दिशा में जा रही हों तो उनमें ऋणात्मक सहसंबंध होता है। दोनों रेखाओं में उच्चावचन जितना कम होगा, सह संबंध उतना ही अधिक होता है। इसके विपरीत उच्चावचन जितना अधिक होगा, सह संबंध उतना ही कम होगा। यदि दोनों रेखाओं में एक दिशा या विपरीत दिशा में परिवर्तित होने की प्रवृत्ति दृष्टिगोचर नहीं होती हो तो यह स्थिति सहसंबंध के अभाव को बताती है।

सहसंबंध रेखाचित्र बनाने के नियम (Rule for Constructing Correlation Graph)

सहसंबंध रेखाचित्र में दोनों चरों मे उभयनिष्ठ (Common) गुण जैसे समय, स्थान या क्रम संख्या इत्यादि को भुजाक्ष (Abscissa or X-axis) पर तथा दोनों श्रेणियों के मूल्यों को कोटि-अक्ष (Ordinate or Y-axis) पर दिखाते हैं। प्रत्येक समंक श्रेणी के लिए अलग-अलग पैमाना लिया जा सकता है तथा उस पैमाने के अनुसार श्रेणी के विभिन्न मूल्यों को रेखा चित्र पर अंकित किया जाता है। प्रत्येक समंक श्रेणी के अंकित मूल्यों को क्रमानुसार मिलाकर रेखा-चित्र बना लिया जाता है। इन रेखाओं को देखकर सह-संबंध की दिशा एवं मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है।

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणक (KARL PEARSON'S CO-EFFICIENT OF CORRELATION)

इस विधि में सह-संबंध की दिशा तथा मात्रा के साथ-साथ संख्यात्मक माप भी किया जाता है। सह-संबंध गुणक की यह विधि माध्य एवं प्रमाप विचलन पर आधारित है। अत: इसमें गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता पायी जाती है। इस विधि का प्रयोग सर्वप्रथम कार्ल पियर्सन ने १८९० में किया था। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सह संबंध गुणक (Coefficient of Correaltion) ज्ञात करते है, जिसे संकेताक्षर 'r' (अंग्रेजी वर्णमाला का छोटा अक्षर) से संबोधित किया जाता है।

व्यक्तिगत श्रेणी में सह-संबंध गुणक की गणना (Computation of Correlation in Individnal Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में सह-संबंध गुणक निम्नांकित दो विधियों से ज्ञात किया ज्ञात सकता है:-

(१) प्रत्यक्ष विधि तथा (२) अप्रत्यक्ष विधि

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) :

इस विधि द्वारा व्यक्तिगत श्रेणी में सह-संबंध गुणक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है:-

१. सर्वप्रथम दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य ($\overline{X}$ व $\overline{Y}$) ज्ञात किये जाते हैं।

२. दोनों श्रेणियों के माध्यों से प्रदत्त मूल्यों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं, अर्थात ($dx=(x-\bar{x})$ तथा ($dy=(y-\bar{y})$)

३. विचलन ज्ञात करने के पश्चात् संबंधित विचलनों का परस्पर गुणा करके गुणनफलों का योग कर लिया जाता है।
$\Sigma dxdy = \Sigma(dx.dy)$

४. X श्रेणी के विचलनों का वर्ग करके उनका योग Σdx^2 ज्ञात कर लिया जाता है ठीक इसी प्रकार Y श्रेणी के विचलनों का वर्ग करके उनका योग Σd^2Y ज्ञात कर लिया जाता है।

५. दोनों श्रेणियों X तथा Y के अलग-अलग प्रमाप विचलन (σx तथा σy) ज्ञात कर लिये जाते हैं।

अन्त में प्रत्यक्ष विधि से सह संबंध गुणक निम्न सुत्रों में से किसी एक सूत्र के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है-

प्रथम सूत्र :- $r=$ सह-विचरण/ $\sigma x \,.\, \sigma y$

जहां कि:-

$$\text{सह विचरण} = \frac{\Sigma dxdy}{N}$$

$\sigma x = x$ श्रेणी का प्रमाप विचलन

$\sigma y = y$ श्रेणी का प्रमाप विचलन

उपयुर्क्त सूत्र का प्रयोग तभी करना चाहिए जबकि सह विचरण तथा दोनों प्रमाप विचलनों का मान दिया हुआ हो।

द्वितीय सूत्रः-
$$r = \frac{\Sigma dxdy}{N\,\sigma x \,.\, \sigma y}$$

तृतीय सूत्रः-
$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x.d^2y}}$$

उपयुर्क्त तीनों ही सूत्र मूलरूप से एक ही हैं इसलिए सभी सूत्रों से ज्ञात सह-संबंध गुणक का मान एक समान ही होगा।

उदाहरण - (Illustration) १

यदि X तथा Y चरों के मध्य सह विचरण +२७०४ है तथा X एवं Y श्रेणी के प्रसरण क्रमशः ५३९८ तथा २२२४ हैं तो दोनों चरों के मध्य सह-संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

If the co-variance between X and Y variables is +2704 and the variance of X and Y series are 5398 and 2224 respectively. Find the co-efficient of correlation between the two variables.

हल (Solution)

दिया हुआ है:-

सह-विचरण = + २७०४

x श्रेणी का प्रसरण (σx^2)= 5398   y श्रेणी का प्रसरण (σy^2)= 2224

x श्रेणी का प्रमाप विचलन (σx) $= \sqrt{\sigma^2 x} = \sqrt{5398}$

$= 73.47$

y श्रेणी का प्रमाप विचलन (σy) $= \sqrt{\sigma^2 y}$

$= \sqrt{2224}$

$= 47.16$

प्रथम सूत्र का प्रयोग करने पर $r = \dfrac{\text{सह विचरण}}{\sigma x \,.\, \sigma y}$

$= \dfrac{+२७०४}{73.47 \text{ X } 47.16}$

$= +०.७८$

निर्वचन: श्रेणी X तथा श्रेणी Y के बीच उच्च स्तरीय धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

उदाहरण – (Illustration) २

निम्न समंको से X तथा Y चरों के मध्य सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए:-

From the following data, compute co-efficient of correlation between X and Y variables:

	X चर	Y चर
१. समान्तर माध्य	35	28
२. संबंधित समान्तर माध्य से निकाले गये विचलनों के वर्गों का योग	146	168
३. संबंधित समान्तर माध्यम से निकाले गये विचलनों के गुणनफल का योग	+152	
४. अवलोकित युग्मों की संख्या	12	

हल:- **(Solution)**

प्रश्न में निम्नांकित प्राचल दिये हुए है:-

$\overline{X} = 35$, $\overline{Y} = 28$, $\Sigma d^2x = 146$, $\Sigma d^2y = 168$,

$\Sigma dxdy = +152$ तथा $N = 12$

प्रश्न का हल तृतीय सूत्र के द्वारा किया जा सकता है।

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x, \Sigma d^2y}}$$

$$= \frac{+152}{\sqrt{146 \times 168}} = \frac{+152}{156.61}$$

$$= +0.97$$

निर्वचन : X तथा Y चरों के मध्य बहुत अधिक मात्रा का धनात्मक सह-संबंध है।

उदाहरण – (Illustration) ३

निम्नांकित समंको से कार्लपीर्यसन का सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए:

Calculate Karl-Pearson`s co-efficient of correlation from the following data:-

Age of Husbands (Years)	22	26	27	28	30	31	33	35
Age of Wives (Years)	18	20	22	27	28	30	31	32

Solution:

Calculation of Co-efficient of correlation:

Age of Husband X	Age of Wife Y	$\overline{X}=29$ $(X-\overline{X})$ *dx*	*(dx X dy)* d^2x	$\overline{Y}=26$ $(Y-\overline{Y})$ *dy*	*(dx X dy)* d^2y	*(dx X dy)* *dxdy*
22	18	-7	49	-8	64	+56
26	20	-3	9	-6	36	+18
27	22	-2	4	-4	16	+8
28	27	-1	1	+1	1	-1
30	28	+1	1	+2	4	+2
31	30	+2	4	+4	16	+8
33	31	+4	16	+5	25	+20
35	32	+6	36	+6	36	+36
$\Sigma X= 232$	$\Sigma Y= 208$	$\Sigma dx= 0$	$\Sigma d^2x= 120$	$\Sigma dy= 0$	$\Sigma d^2y= 198$	$\Sigma dxdy= +147$

$$\overline{X} = {}^{\Sigma X}/_{N} = {}^{232}/_{8} = 29$$
$$\overline{Y} = {}^{\Sigma Y}/_{N} = {}^{208}/_{8} = 26$$

$\because \overline{X}$ तथा $\overline{Y}$ पूर्ण संख्या में हैं इसलिए प्रत्यक्ष विधि लागू की जा सकती है।

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x, \Sigma d^2y}}$$

$$= \frac{+147}{\sqrt{120 \times 198}} = \frac{+147}{154.14}$$

$$= +0.95$$

निर्वचन : पति की आयु तथा पत्नी की आयु के मध्य बहुत अधिक मात्रा का धनात्मक सह–संबंध है।

अप्रत्यक्ष/लघु विधिः– (Indirect Method or Shortcut Method) :

जब किसी श्रेणी का समान्तर माध्य पूर्ण संख्या में न हो तब विचलन एवं विचलन वर्गों की गणना कठिन हो जाती है। क्लिष्ठ गणना से बचने के लिए सह संबंध गुणक की गणना अप्रत्यक्ष विधि से की जा सकती है। अप्रत्यक्ष विधि के अन्तर्गत चरों से विचलन संबंध समान्तर माध्य की बजाय संबंधित काल्पनिक माध्य से ज्ञात किये जाते हैं। समान्तर माध्य से निकाले गये विचलनों का य्रोग शून्य होता है परन्तु काल्पनिक माध्य से निकाले गये विचलनों का योग शून्य नहीं होता है। अप्रत्यक्ष विधि के अन्तर्गत अग्रांकित सूत्रों के प्रयोग द्वारा सह–संबंध गुणक ज्ञात किया जा सकता है:–

मूल सूत्रः–

$$r = \frac{\text{सह–विचरण}}{\sigma x.\sigma y}$$

$$\text{चूंकि सह–विचरण} = \frac{\Sigma dxdy - {}^{\Sigma dx.\Sigma dy}/_{N}}{N}$$

$$\text{अथवा सह–विचरण} = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X}-Ax)(\overline{Y}-Ay)}{N}$$

अत: अप्रत्यक्ष विधि के अन्तर्गत निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है:–

प्रथम सूत्रः–
$$r = \frac{\Sigma dxdy - {}^{\Sigma dx.\Sigma dy}/_{N}}{N.\sigma x.\sigma y}$$

द्वितीय सूत्रः–
$$r = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X}-Ax)(\overline{Y}-Ay)}{N.\sigma x.\sigma y}$$

तृतीय सूत्रः–
$$r = \frac{\Sigma dxdy - (\Sigma dx.\ \Sigma dy)/N}{\sqrt{\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2/N}\ \sqrt{\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2/N}}$$

चतुर्थ सूत्रः–
$$r = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X}-Ax)(\overline{Y}-Ay)}{\sqrt{\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2/N}\ \sqrt{\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2/N}}$$

उदाहरण :–(Illustration) ४

यदि $N = 60$, $\Sigma dx = 75$, $\Sigma dy = 80$, $\Sigma d^2x = 130$, $\Sigma d^2y = 140$, $\Sigma dxdy = 120$ हो तो सह संबंध गुणक का मान ज्ञात कीजिए:–

If $N = 60$, $\Sigma dx = 75$, $\Sigma dy = 80$, $\Sigma d^2x = 130$, $\Sigma d^2y = 140$, $\Sigma dxdy = 120$,

Find the value of coefficient of correlation.

हल:– **(Solution)**

$$r = \frac{\Sigma dxdy - {}^{\Sigma dx.\Sigma dy}/_{N}}{\sqrt{\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2/N} \times \sqrt{\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2/N}}$$

$$r = \frac{120 - {}^{75 \times 80}/_{60}}{\sqrt{130-(75)^2/60} \times \sqrt{140-(80)^2/60}}$$

$$r = \frac{120 - 100}{\sqrt{130-93.75} \times \sqrt{140-106.67}}$$

$$r = \frac{120 - 100}{\sqrt{6.02} \times \sqrt{5.77}}$$

$$r = +0.576$$

निर्वचन: **X** तथा **Y** चरों के मध्य मध्यमस्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध है।

उदाहरण :– (Illustration) ५

निम्नांकित समंको से **X** तथा **Y** चरों के मध्य सह–संबंध गुणक ज्ञात कीजिए:–

Calculate coefficient of correlation between 'X' and 'Y' variables from the following data:

	'X' श्रेणी	**'Y'** श्रेणी
अवलोकित युग्मों की संख्या	**100**	**100**
प्रसरण	81	225
समान्तर माध्य	32	42
काल्पनिक माध्य	27	44

संबंधित काल्पनिक माध्यों से निकाले गये तत्संबंधी विचलनों के गुणनफल का योग = + ९२६०

हल : Solution:

दिया हुआ है: $N = 100$, $\sigma x = \sqrt{81} = 9$, $\sigma y = \sqrt{225} = 15$, $\overline{X} = 32$,

$\overline{Y} = 42$, $Ax = 27$, $Ay = 44$, $\Sigma dxdy = +9260$

द्वितीय सूत्र लगाने पर :

$$r = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X} - Ax).(\overline{Y} - Ay)}{N.\sigma x.\sigma y}$$

$$= \frac{9260 - 100(32-27).(42-44)}{100 \times 9 \times 15}$$

$$= \frac{9260 + 1000}{13500} = \frac{10260}{13500}$$

$$= +0.76$$

निर्वचन : X तथा Y चरों के मध्य बहुत अधिक मात्रा का धनात्मक सह–संबंध है।

उदाहरण :- (**Illustration**) ६

निम्नांकित समंकों से सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए:-

Calculate coefficient of correlation from the data given below:

X	18	16	13	12	14	15	17	11
Y	19	18	12	10	13	15	16	7

हल **Solution:**

सह संबंध गुणक की गणना :-

X	**Y**	**Ax=15** *dx= (x-Ax)*	d^2x	**Ay=14** *dy= (Y-Ay)*	d^2y	*dxdy*
18	19	+3	9	+5	25	+15
16	18	+1	1	4	16	+4
13	12	-2	4	-2	4	+4
12	10	-3	9	-4	16	+12
14	13	-1	1	-1	1	1
15	15	0	0	+1	1	0
17	16	+2	4	+2	4	+4
11	7	-4	16	-7	49	+28
ΣX= 116	ΣY= 110	Σdx= -4	Σd^2x= 44	Σdy= -2	Σd^2y= 116	Σdxdy= +68

$$\bar{X} = {}^{116}/_{8} = 14.50$$

$$\bar{Y} = {}^{110}/_{8} = 13.75$$

$\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ का मान भिन्न संख्या में आया है इसलिए गणना को सरल बनाने के लिए अप्रत्यक्ष विधि का प्रयोग किया जायेगा।

माना कि X श्रेणी का काल्पनिक माध्य (Ax) = 15 है तथा

Y श्रेणी का काल्पनिक माध्य (Ay) = 14 है

$$r = \frac{\Sigma dxdy - {}^{\Sigma dx.\Sigma dy}/_{N}}{\sqrt{\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2/N} \times \sqrt{\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2/N}}$$

$$r = \frac{+68 - {}^{-4 \times -2}/_{8}}{\sqrt{44 -(-4)^2/8} \times \sqrt{116-(-2)^2/8}}$$

$$r = \frac{+67}{\sqrt{42 \times 115.5}} = +0.962$$

निर्वचन : X तथा Y चरों के मध्य बहुत अधिक मात्रा का धनात्मक सह-संबंध है।

द्विचर आवृत्ति बंटन/वर्गीकृत संमकों में सह-सम्बन्ध गुणक

(Coefficient of Correlation in Bi-Variate Frequency Distribution/Grouped Data)

जब किसी श्रेणी में प्रत्येक आवृत्ति दो चरों से सम्बन्ध रखती हो तब ऐसी समंक श्रेणी को द्विचर आवृत्ति बंटन कहा जाता है। ऐसे बंटन में एक चर पंक्ति में तथा दूसरा चर स्तम्भ में होता है। व्यक्तिगत श्रेणी में बताये गये सूत्रों में से किसी भी एक सूत्र का प्रयोग सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिए काम में लिया जा सकता है परन्तु प्रत्येक स्थिरांक से पूर्व (f) लगाना पड़ता है। वर्गीकृत संमकों में सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है:

$$r = \frac{\sum Fdxdy - {}^{\sum Fdx.\sum Fdy}/_{N}}{\sqrt{\sum Fd^2x - {}^{(\sum Fdx)^2}/_{N}} \text{ X } \sqrt{\sum Fd^2y - {}^{(\sum Fdy)^2}/_{N}}}$$

वर्गीकृत श्रेणी में सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है:

(1) सतत् श्रेणी की स्थिति में X एवं Y श्रेणी के मध्य-बिन्दु ज्ञात कर किसी भी कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किये जाते हैं। वर्गान्तर समान होने पर दोनों श्रेणियों में अथवा किसी भी एक श्रेणी में पद-विचलन लिये जा सकते हैं। इन विचलनों/पद विचलनों को क्रमश: dx एवं dy कहा जावेगा।

(2) विचलनों तथा आवृत्तियों का गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात कर लेते है जो कि $\sum fdx$ तथा $\sum fdy$ होंगे।

(3) fdx को dx से तथा fdy को dy से गुणा करके उनका योग $\sum fd^2x$ तथा $\sum fd^2y$ ज्ञात किया जावेगा।

(4) fdxdy को ज्ञात करने हेतु प्रत्येक कोष्ठ आवृत्ति तथा dx और dy को आपस में गुणा करेंगे। $\sum fdxdy$ का योग पंक्ति तथा स्तम्भ, दोनों तरफ समान होता है।

सूत्र में प्रयुक्त $\sum fdxdy$ की गणना निम्न प्रकार की जानी चाहिए:

(i) कोष्ठ आवृत्ति को तालिका में छोटे खाने के मध्य दिखाएं।

(ii) प्रत्येक कोष्ठ आवृत्ति से सम्बन्धित 'dx' तथा 'dy' का गुणा करके कोष्ठ आवृत्ति वाले खाने के ऊपर बाँयी ओर दिखाएं।

(iii) इस प्रकार dxdy का गुणा सम्बन्धित कोष्ठ आवृत्ति से करके छोटे खाने में नीचे दाँयी ओर गहरे अक्षरों में अंकित करें। ऐसा इसलिए किया जात है कि जिससे कि fdxdy का योग करते समय त्रुटि न हों।

(iv) सभी चरों वर्गों के सामने fdxdy का योग करें।

(v) इस प्रकार प्राप्त fdxdy का पुन: कुल योग करने पर अभीष्ट $\sum fdxdy$ प्राप्त हो जाता है।

(5) उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग किया जावें।

उदाहरण (Illustration)- 7:

निम्नांकित संमकों से १०० माताओं एवं पुत्रियों की आयु के बीच सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात किजिए:

Calculate coeficient of correlation between the ages of 100 mothers and daughters from the following data:

Ages of mothers (in years)	**Ages of Daughters (in years)**					
	5-10	**10-15**	**15-20**	**20-25**	**25-30**	**Total**
15-25	6	3	-	-	-	9
25-35	3	16	10	-	-	29
35-45	-	10	15	7	-	32
45-55	-	-	7	10	4	21
55-65	-	-	-	4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

हल: (**Solution:**) **सह–संबंध गुणक की गणना**

(Y) Ages of mothers	M.V. Y		(X) Ages of Daughters								
		dy	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	Total (fy)	fdy	fd^2y	fdxdy
15-25	20	-2	${}^{4}\,6\,{}_{24}$	${}^{2}\,3\,{}_{6}$	-	-	-	9	-18	36	30
25-35	30	-1	${}^{2}\,3\,{}_{6}$	${}^{1}\,16\,{}_{16}$	${}^{0}\,10\,{}_{0}$	-	-	29	-29	29	22
35-45	40	0	-	${}^{0}\,10\,{}_{0}$	${}^{0}\,15\,{}_{0}$	${}^{0}\,7\,{}_{0}$	-	32	0	0	0
45-55	50	1	-	-	${}^{0}\,7\,{}_{0}$	${}^{1}\,10\,{}_{10}$	${}^{2}\,4\,{}_{8}$	21	21	21	18
55-65	60	2	-	-	-	${}^{2}\,4\,{}_{8}$	${}^{4}\,5\,{}_{20}$	9	18	36	28
		fx	9	29	32	21	9	100 (N)	-8 Σfdy	122 Σfd^2y	98 $\Sigma fdxdy$
		M.V.	7.50	12.50	17.50	22.50	27.50				
		dx	-2	-1	0	+1	+2				
		fdx	**-18**	**-29**	**0**	**21**	**18**	**-8**	Σ**fdx**		
		fd^2x	**36**	**29**	**0**	**21**	**36**	**122**	Σfd^2x		

Note:

$$M.V. = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

$$dx = \left[\frac{M.V.(X) - Ax}{ix}\right]$$

$$dy = \left[\frac{M.V.(y) - Ay}{iy}\right]$$

Ax = X श्रेणी का काल्पिनिक माध्य अर्थात् 17.50

Ay = Y श्रेणी का काल्पिनिक माध्य अर्थात् 40

ix = 5 तथा iy = 10

$$r = \frac{\Sigma Fdxdy - \left(\Sigma Fdx.\Sigma Fdy/_N\right)}{\sqrt{\Sigma Fd^2x - (\Sigma Fdx)^2/_N} \text{ X } \sqrt{\Sigma Fd^2y - (\Sigma Fdy)^2/_N}}$$

$$= \frac{98 - \left(-8 \times -8/_{100}\right)}{\sqrt{122 - (-8)^2/_{100}} \text{ X } \sqrt{122 - (-8)^2/_{100}}}$$

$$= \frac{98 - 0.64}{121.36} = \frac{97.36}{121.36} = +0.802$$

$$\boxed{r = +0.802}$$

अत: माताओं की उम्र तथा पुत्रियों की उम्र में उच्चस्तरीय धनात्मक सम्बन्ध है।

मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव
(Effect of Change in Origin and Scale)

किसी श्रेणी के मूल बिन्दु में परिवर्तन का अर्थ है उस श्रेणी के सभी चरों में एक निश्चित संख्या को घटाना अथवा जोड़ना। इसी प्रकार किसी श्रेणी के पैमाने में परिवर्तन का अर्थ है उस श्रेणी के सभी चरों में एक निश्चित संख्या का भाग देना अथवा गुणा करना। सह–सम्बन्ध गुणक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है तथा यह मूल बिन्दु तथा पैमाने के प्रति स्वतन्त्र है। गणना को सरल करने के लिए मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन किया जा सकता है। उपयुक्त उदाहरण ७ में काल्पनिक माध्य Ax तथा Ay को सम्बन्धित चर में से घटाने की प्रक्रिया को मूल बिन्दू में परिवर्तन करना कहा जाता है। तथा ix एवं iy का भाग देने को पैमाने में परिवर्तन करना कहा जाता है।

सम्भाव्य विभ्रम
(Probable Error)

सह–सम्बन्ध गुणक की विश्वसनीयता की जाँच करने हेतु सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। सम्भाव्य विभ्रम वह राशि है जिसे सह–सम्बन्ध गुणक में जोड़ने एवं घटाने पर ऐसी संख्याएँ आ जाती हैं, जिनके अर्न्तगत दैव निदर्शन के आधार पर छाँटे गये प्रतिदर्शों में गुणक के पाये जाने की सम्भावना एक समान हो जाती है।

सम्भाव्य विभ्रम $(P.E.) = 0.6745 \times {}^{1-r^2}/_{\sqrt{N}}$

अथवा

$$(P.E.) = {}^2/_3 \times {}^{1-r^2}/_{\sqrt{N}}$$

अथवा

$(P.E.) = {}^2/_3 \times$ प्रमाप विभ्रम

सम्भाव्य विभ्रम की सहायता से कार्ल पियर्सन सह–सम्बन्ध गुणक की सार्थकता का निर्वचन निम्न प्रकार किया जा सकता है:

(i) यदि प्राप्त सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात किये गये सम्भाव्य विभ्रम से कम है अर्थात् $(r < P.E.)$ तो इसका अर्थ यह होगा कि दोनों श्रेणियों में सह–सम्बन्ध की सार्थकता निश्चित नहीं की जा सकती।

(ii) यदि सह–सम्बन्ध गुणक सम्भाव्य विभ्रम के ६ गुना या उससे अधिक $(r > 6P.E.)$ है तो ऐसी स्थिति में सह–सम्बन्ध गुणक सार्थक माना जायेगा।

(iii) यदि सह–सम्बन्ध गुणक सम्भाव्य विभ्रम के ६ गुना से कम है $(r < 6P.E.)$ तो यह माना जायेगा कि सह–सम्बन्ध गुणक की सार्थकता कम है।

प्रमाप विभ्रम
(Standard Error)

सह–सम्बन्ध गुणक की प्रमाप विभ्रम निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है:

$$S.E.\ of\ r = {}^{1-r^2}/_{\sqrt{N}}$$

ज्ञात किये गये सह–सम्बन्ध गुणक में प्रमाप विभ्रम का ३ गुना घटाने एवं जोड़ने पर वह निचली एवं ऊपरी सीमाएं ज्ञात हो जायेगी जिनके मध्य उसी समग्र से लिये गये विभिन्न प्रतिदर्शों के सह–सम्बन्ध गुणकों के पाये जाने की सम्भावना है।

r की सीमाएं = $r \pm 3S.E.\ of\ r$

स्पियरमैन की कोटि अन्तर विधि
(Spearman`s Rank Difference Method)

गुणात्मक तथ्यों को संख्या में व्यक्त करना कठिन होता है परन्तु उन्हें क्रम (Rank) में रखा जा सकता है, गुणात्मक तथ्यों में सह–सम्बन्ध निर्धारित करने के लिए यह रीति उपयुक्त होती है। उदाहरणार्थ, सुन्दरता का अंकात्मक माप सम्भव नहीं हैं। परन्तु एक समूह में व्यक्तियों को सुन्दरता के क्रम में व्यवस्थित किया जा सकता है, अर्थात् जो सबसे सुन्दर होगा उसे पहला क्रम (First rank) दे दिया जायेगा, तत्पश्चात् उससे कम सुन्दर व्यक्ति को दूसरा क्रम इसी प्रकार क्रमशः व्यक्तियों को क्रम प्रदान कर दिये जावेंगे। क्रम प्रदान करने के पश्चात् दोनों चरों की कोटियों (ranks) के आधार पर सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात कर लिया जाता है।

कोटि अन्तर विधि के अन्तर्गत चर मूल्यों के निरपेक्ष मान (absolute values) के आधार पर सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात नहीं किया जा सकता है वरन् चरों की सापेक्ष स्थिति (Relative Position) के आधार पर सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि का प्रतिपादन चार्ल्स स्पियरमैन ने व्यक्तिगत श्रेणी में सह–सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए किया था इसलिए इस विधि को स्पियरमैन की कोटि अन्तर विधि (Spearman`s Rank Difference Method) या क्रमान्तर विधि (Ranking Method) भी कहा जाता है। इस विधि से ज्ञात सह–संबंध गुणक का मान ± १ (दोनों सीमाओं को सम्मिलित करते हुए) के मध्य होता है।

कोटि अन्तर विधि से सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात करने की विधि

(१) **क्रम प्रदान करना**– प्रत्येक श्रेणी के मूल्यों को पृथक्–पृथक् क्रम प्रदान किये जाते हैं जो कि सबसे बड़े मूल्य से प्रारम्भ होकर छोटे मूल्य तक पहुँचते हैं। इसी प्रकार सबसे छोटे मूल्य से भी प्रारम्भ करके सबसे बड़े मूल्य तक क्रम दिये जा सकते हैं।

(२) **मध्य क्रम विधि**– यदि श्रेणी में एक समान चर हो तो उनके क्रम, चरों के माध्य क्रम को ही सभी चरों के क्रम कें रूप में दे दिया जाता है जैसे– एक श्रेणी का प्रथम पद ६० है उसके बाद ५० तीन बार आया है तथा पाँचवा पद ४५ है तो ऐसी स्थिति में सर्वप्रथम ६० को क्रम १ प्रदान करेंगें तत्पश्चात् तीनों ५० मूल्यों को क्रमांक ३ प्रदान किया जायेगा क्योंकि (२+३+४/३) का माध्य क्रम = ३ है। इस ५० के बाद वाले पद ४५ को क्रम ५ वाँ देंगे क्योंकि ५० वाँ पद वाले मूल्यों में २,३ तथा ४ क्रमांक का प्रयोग किया जा चुका है।

(३) **विचलन ज्ञात करना**– दोनों श्रेणियों के पदों को क्रम प्रदान करने के पश्चात् पदों के क्रमों को क्रमशः घटाकर क्रम अन्तर (Rank Difference) अर्थात् (D) ज्ञात कर लेते हैं। **क्रमान्तर का योग (ΣD) सदैव ० आता है।**

(४) **विचलन वर्ग ज्ञात करना**– जो क्रम अन्तर आते हैं उनका वर्ग (D^2) ज्ञात कर लिया जाता है। तत्पश्चात् इन क्रमान्तरों के वर्गों को जोड़ लिया जाता है जिन्हें ΣD^2 के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(५) **सूत्र**– उपर्युक्त क्रियाएँ करने के बाद निम्न सूत्र द्वारा सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात कर लिया जाता है–

$r_R = 1 - {}^{6\Sigma D^2}/_{N(N^2-1)}$ अथवा $r_R = 1 - {}^{6\Sigma D^2}/_{N^3-N)}$

r_R = क्रमान्तर सह–सम्बन्ध गुणक

ΣD^2 = क्रमों के विचलनों के वर्गों का योग

N = पदों की संख्या

समान्तर क्रम के संशोधन
(Correlation for tied ranks)

समंक श्रेणी में जब दो या दो से अधिक चर मूल्यों का आकार समान हो तो उन्हें समान क्रम प्रदान किये जाते है। ऐसी स्थिति में कोटि–अन्तर सह–सम्बन्ध गुणक निकालने के सूत्र में संशोधन करना पड़ता है। संशोधित सूत्र निम्न प्रकार है:

$$r_R = 1 - \frac{6\Sigma D^2 + {}^1/_{12}(m^3-m)}{N(N^2-1)}$$

सूत्र में प्रयुक्त m = उन पद मूल्यों की संख्या जिनके क्रम समान है।

यहाँ यह ध्यान रखा जाना चाहिए कि उपरोक्त संशोधित सूत्र में + $^1/_{12}(m^3\text{-}m)$ का संशोधन उतनी बार करना होगा जितनी बार दोनों श्रेणियों में समान क्रम आये हैं। उदाहरणार्थ, यदि श्रेणी में १६० तीन बार, १५० दो बार तथा श्रेणी में १८० तीन बार आया हैं, तो दोनों श्रेणियों में समान क्रम तीन बार आये हैं। ऐसी परिस्थिति में सूत्र में + $^1/_{12}(m^3\text{-}m)$ का तीन बार संशोधन करना होगा तथा सूत्र का रूप निम्न प्रकार होगा:

$$r_R = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + {}^1/_{12}(3^3-3) + {}^1/_{12}(3^3-3) + {}^1/_{12}(2^3-2)\right]}{N(N^2-1)}$$

उदाहरण (Illustration)- 8:

निम्न संमकों से स्पियरमैन का कोटि सह–सम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए:

Calculate the Spearman's coefficient of rank correlation from the following data:

X	48	33	40	9	16	16	65	24	16	57
Y	13	13	24	6	15	4	20	9	6	19

हल Solution :

कोटि सह–सम्बन्ध गुणक की गणना

X	Y	R_1	R_2	Rank Difference (R_1-R_2) D	D_2
48	13	3	55	-2.5	6.25
33	13	5	5.5	-0.5	0.25
40	24	4	1	+3.0	9.00
9	6	10	8.5	+ 1.5	2.25
16	15	8	4	+4.0	16.00
16	4	8	10	-2.0	4.00
65	20	1	2	-1.0	1.00
24	9	6	7	-1.0	1.00
16	6	8	8.5	-0.5	0.25
57	19	2	3	-1.0	1.00
N=10				0 Σ D	41.00Σ D^2

$$r_R = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + 1/12\,(m^3-m) + 1/12\,(m^3-m) + 1/12\,(m^3-m)\right]}{N\,(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[41 + 1/12\,(3^3-3) + 1/12\,(2^3-2) + 1/12\,(2^3-2)\right]}{10\,(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,[41 + 2 + 0.5 + 0.5]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 44}{990}$$

$$= 1 - \frac{264}{990} = +\,0.733$$

निर्वचन : X तथा Y चरों के मध्य धनात्मक सह–संबंध है।

उदाहरण (Illustration)- 9:

एक सौन्दर्य प्रतियोगिता में दो निर्णायकों द्वारा १० प्रतियोगियों को निम्न प्रकार क्रम प्रदान किये गये:

The ten competitors in a beauty contest are ranked by two judges in the following order:

प्रथम निर्णायक	१	६	५	१०	३	२	४	९	७	८
द्वितीय निर्णायक	६	४	९	८	१	३	३	१०	५	७

क्रमान्तर सह-सम्बन्ध गुणक के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि क्या निर्णायक समान रूचि के हैं ?

हल Solution : **कोटि सह-सम्बन्ध गुणक की गणना**

R_1	R_2	(R_1-R_2) D	*Deviation Squares*
1	6	-5	25
6	4	+2	4
5	9	-4	16
10	8	+2	4
3	1	+2	4
2	2	0	0
4	3	+1	1
9	10	-1	1
7	5	+2	4
8	7	+1	1
Total		$0 \Sigma D$	$60 \Sigma D^2$

$$r_R = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{(N^3-N)}$$

अथवा $r_R = 1 - \frac{6 \times 60}{(10^3-10)} = 1 - \frac{360}{990} = + \frac{630}{990} = +.6363$

निर्वचन : निर्णयकों में सुन्दरता के प्रति मध्यम स्तरीय धनात्मक रूचि है।

उदाहरण (Illustration)- 10:

तीन निर्णायकों के अलग-अलग निर्णय द्वारा एक प्रतियोगिता के १० प्रतियोगियों को निम्न क्रम स्थान उपलब्ध हुए। क्रमान्तर सह-सम्बन्ध गुणके के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि किन दो निर्णायकों की रूचि सामान्य अभिरूचि से अधिक निकट है।

Ten competitors in a beauty contest are ranked in the following order. Use the rank correlation coefficient to discuss which pair of judges has the nearest approach to common taste in beauty:

First Judge	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
Second Judge	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
Third Judge	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

हल **Solution :**

कोटि सह-सम्बन्ध गुणक की गणना

R_1	R_2	R_3	(R_1-R_2) D_1	D^2_1	(R_2-R_3) D_2	D^2_2	(R_1-R_3) D_3	D^2_3
1	3	6	2	4	3	9	-5	25
6	5	4	1	1	1	1	2	4
5	8	9	-3	9	-1	1	-4	16
10	4	8	6	36	-4	16	2	4
3	7	1	-4	16	6	36	2	4
2	10	2	-8	64	8	64	0	0
4	2	3	2	4	-1	1	1	1
9	1	10	8	64	-9	81	-1	1
7	6	5	1	1	1	1	2	4
8	9	7	-1	1	2	4	1	1
Total			0 ΣD_1	200 ΣD^2_1	0 ΣD_2	214 ΣD^2_2	0 ΣD_3	60 ΣD^2_3

निर्णायक प्रथम एवं द्वितीय

$$r_{R12} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2_1}{(N^3-N)}$$

$$= 1 - \frac{6 X 200}{(10^3-10)}$$

$$= 1 - \frac{1200}{990}$$

$$= -0.212$$

निर्णायक द्वितीय एवं तृतीय

$$r_{R23} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2_2}{(N^3-N)}$$

$$= 1 - \frac{6 X 214}{(10^3-10)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= -0.297$$

निर्णायक प्रथम एवं तृतीय

$$r_{R13} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2_3}{(N^3-N)}$$

$$= 1 - \frac{6 X 60}{(10^3-10)}$$

$$= 1 - \frac{360}{990}$$

$$= +0.6364$$

निर्वचन: प्रथम एवं तृतीय निर्णायकों की रूचि सामान्य अभिरूचि से अधिक निकट है।

संगामी विचलन विधि
(Concurrent Deviation Method)

जब दो श्रेणियों में केवल यह जानना हो कि सह-सम्बन्ध किस दिशा में है अर्थात् धनात्मक है अथवा ऋणात्मक, तब ऐसी स्थिति में इस विधि का प्रयोग किया जाता है।

संगामी विचलन गुणक निकालने की प्रक्रिया:

(i) प्रत्येक पद की उससे पूर्व वाले पद से तुलना करके विचलन की दिशा ज्ञात की जाती है जो (+) या (–) में हो सकती है। विचलन चिन्ह लिखते समय इस बात को ध्यान में रखना चाहिए कि यदि किसी पद का मूल्य, उसके पिछले पद-मूल्य से अधिक है तो उस पद का विचलन (+) होगा, और यदि पद का मूल्य उसके पिछले पद-मूल्य से कम है तो विचलन (–) होगा, और यदि बराबर है तो विचलन (=) लिखा जायेगा। विचलनों में केवल चिन्हों का प्रयोग किया जाता है न कि वास्तविक मूल्यों का। प्रथम पद का विचलन ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

(ii) विचलनों को ज्ञात करने के पश्चात् X तथा Y श्रेणी के तत्सम्बन्धी एक से विचलनों के आधार पर संगामी विचलनों के लिए (+) का चिन्ह रख दिया जाता हैं। यदि X तथा Y दोनों (+) है या दोनों (–) है अथवा दोनों (=) हैं, तो इनके लिए (+) लिखा जायेगा। समान दिशा वाले विचलनों (+) को जोड़कर उनकी कुल संख्या ज्ञात कर लेते हैं, इन्हें ही संगामी विचलन कहा जाता है। संगामी विचलनों को C से प्रदर्शित करते है।

(iii) इसके पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग कर सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात कर लिया जाता है-

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2C-N}{N}\right)}$$

जहाँ पर, r_C = संगामी विचलन सह-सम्बन्ध गुणक

C = संगामी विचलनों की संख्या [अर्थात् कुल (+) के चिन्हों की संख्या]

N = विचलन युग्मों की संख्या (अर्थात् कुल पद-१)

सूत्र में (±) चिन्हों का महत्त्व : सूत्र में वास्तविक चिन्ह के पहले तथा वर्गमूल के अन्दर (±) चिन्हों का प्रयोग किया गया है। यदि (2c - N) धनात्मक है तो दोनों स्थानों पर चिन्ह (+) का प्रयोग किया जायेगा। इसके विपरीत यदि (2c - N) ऋणात्मक है तो दोनों स्थानों पर चिन्ह (–) का प्रयोग किया जायेगा। यदि ऐसा न किया जाये तो वर्गमूल चिन्ह के अन्दर की राशि ऋणात्मक ही रहेगी, जिसका वर्गमूल ज्ञात करना सम्भव नहीं होगा।

नोट:- इस विधि से ज्ञात सह-संबंध गुणक का मान ± १ (दोनों सीमाओं को सम्मिलित करते हुए) के मध्य होता है।

उदाहरण (Illustration)- 11:

निम्न समंकों से संगामी विचलन रीति द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक का परिकलन कीजिए:

From the following data, calculate the coefficient of correlation by concurrent deviation method:

YEAR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
INDEX NUMBER OF SUPPLY	115	125	130	120	120	125	130	130	135	140
INDEX NUMBER OF PRICES	105	101	101	105	101	99	100	100	98	94

SOLUTION:

संगामी विचलन विधि द्वारा सह-संबंध गुणक की गणना:-

Year	Index No of Supply X	Deviation Signs X	Index No of Prices Y	Deviation Signs Y	Product of Deviation Signs
1	115	....	105	....	....
2	125	+	101	-	-
3	130	+	101	=	-
4	120	-	105	+	-
5	120	=	101	-	-
6	125	+	99	-	-
7	130	+	100	+	+
8	130	=	100	=	+
9	135	+	98	-	-
10	140	+	94	-	-
		N = 9		N = 9	C = 2

नोट:- एक ही प्रकार के चिन्हों का गुणनफल धनात्मक होता है तथा विपरीत प्रकार के चिन्हों का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

$$r_c = \pm\sqrt{\frac{\pm(2c - N)}{N}} \qquad \because \quad (2c\text{-}N) = (4\text{-}9 < 0,)$$

अत: दोनों जगहों पर ऋणात्मक चिन्ह लिया जावेगा।

$$r_c = -\sqrt{\frac{-(4 - 9)}{9}} \qquad = \sqrt{\frac{5}{9}} = \quad -0.7454$$

अत: rc = -0.7454

उदाहरण (Illustration)- 12:

वित्तीय वर्ष २००८-०९ के प्रथम ९ माह में अंश A तथा B के मूल सूचकांकों में निम्न प्रकार के परिवर्तन दर्ज किये गये; उपयुक्त विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए:

पिछले माह की तुलना में परिवर्तन:

माह	अप्रेल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
अंश A	-३	-२	-५	०	+४	+३	+१	-२	+२
अंश B	+२	+४	-१	-३	-५	-२	०	-१	-३

During first 9 months of financial year 2008-09, the following changes in the price index of A and B shares were recorded:

Calculate coefficient of correlation by a suitable method.

Changes over the previous month:

Month	Apr.	May	June	July	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
Share A	-3	-2	-5	0	+4	+3	+1	-2	+2
Share B	+2	+4	-1	-3	-5	-2	0	-1	-3

हल **SOLUTION**

संगामी विचलन विधि द्वारा सह-संबंध गुणक की गणना:-

	Share 'A'		Share 'B'		
माह	परिवर्तन	विचलन चिन्ह	परिवर्तन	विचलन चिन्ह	संगामी विचलन
April	-3	-	+2	+	....
May	-2	-	+4	+	....
June	-5	-	-1	-	+
July	0	=	-3	-	....
August	+4	+	-5	-	....
September	+3	+	-2	-	....
October	+1	+	0	=	....
November	-2	-	-1	-	+
December	+2	+	-3	-	....
N = 9					c = 2

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\frac{(2c - N)}{N}} = -\sqrt{\frac{-[(2 \text{ X } 2) - 9]}{9}} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -.745$$

काल श्रेणी में सह-सम्बन्ध

(Correlation in Time Series)

जब समंकों को उनके घटित होने के समय के क्रम में व्यवस्थित किया जावे तो ऐसी व्यवस्था को काल श्रेणी कहा जाता है। ऐसी श्रेणी में समय की इकाई को स्वतन्त्र चर 'X' माना जाता है तथा समय में परिवर्तन के प्रभाव को आश्रित चर 'Y' माना जाता है। प्रत्येक काल श्रेणी व्यक्तिगत श्रेणी होती है क्योंकि प्रत्येक मद को समय की इकाई (वर्ष, माह, पखवाड़ा, सप्ताह, दिन, घण्टे आदि) के अनुसार दिखाया जाता है।

काल श्रेणी दो प्रकार के परिवर्तनों से प्रभावित होती है:

(i) दीर्घकालीन परिवर्तन; तथा

(ii) अल्पकालीन परिवर्तन।

दीर्घकालीन परिवर्तनों के लिए सह-सम्बन्ध गुणक की गणना:

(Computation of Coefficient of Correlation for Long-term Changes):

दीर्घकालीन परिवर्तनों के लिए सह-सम्बन्ध गुणक की गणना करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है:

(i) दिये गये मूल्यों के लिए चल-माध्यों (Moving Averages) की गणना की जावे।

(ii) पहली श्रेणी के चल-माध्यों को 'X' से तथा दूसरी श्रेणी के चल-मध्यों को 'Y' से प्रदर्शित किया जावे।

(iii) कार्ल पियर्सन के सूत्र से X तथा Y चरों के बीच सह-सम्बन्ध गुणक की गणना की जावे।

नोट: चल-माध्यों की विस्तृत चर्चा अगले अध्याय **काल श्रेणी का विश्लेषण** में की गयी है।

अल्पकालीन परिवर्तनों के लिए सह-सम्बन्ध गुणक की गणना:

(Computation of Coefficient of Correlation for Short-term Changes):

अल्पकालीन परिवर्तनों के लिए सह-सम्बन्ध गुणक की गणना करने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है:

(i) दिये गये मूल्यों के लिए चल-माध्यों की गणना की जावे।

(ii) अल्पकालीन उच्चावचनों की गणना की जावे। मल समंक एवं चल-माध्य के बीच का अन्तर अल्पकालीन उच्चावचन कहलाते है। इन उच्चावचनों को dx एवं dy से इंगित किया जाता है।

(iii) सामान्य तरीके से $\sum dxdy$, $\sum d^2x$ तथा $\sum d^2y$ की गणना की जावे।

(iv) सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए कार्ल पियर्सन का निम्न सूत्र का प्रयोग किया जावे:

$$r = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum d^2x \,.\, \sum d^2y}}$$

उदाहरण (Illustration)- 13:

निम्नांकित संमकों से आपूर्त्ति के एवं मूल्यों के सूचकांक में दीर्घकालीन परिवर्तनों के मध्य सह-सम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए:

from the following data find out the coefficient of correlation between the fluctuations of the index of supply and the index of price of certain commodities as given below:

Year	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Index of supply	76	84	88	93	85	87	91	98	95
Index of Price	152	145	135	122	138	132	120	100	105

तीन वर्षीय चल माध्य लेने है तथा गणना करने हेतु दशमल संख्या को छोड़ना है।

Take 3 years' moving averages and ignore decimals in computing the averages.

कृपया हल अगले पन्ने पर देखें

नोट:- चल माध्यों का विस्तर्त विवरण अगले अध्याय काल श्रेणी की विश्लेषण में दिया गया है।

उदाहरण – १३ का हल Solution:

Computation of Coefficient of Correlation

	Supply					Price					
Year	Index No. (Ox)	3- yearly Moving Totals	3- yearly Moving Average (X)	$\overline{X} = 89$ dx	d^2x	Index No. (Oy)	3- yearly Moving Totals	3- yearly Moving Average (Y)	$\overline{Y} = 128$ dy	d^2y	dxdy
1998	76	-	-	-	-	152	-	-	-	-	-
1999	84	248	83	-6	36	145	432	144	16	256	-96
2000	88	265	88	-1	1	135	402	134	6	36	-6
2001	93	266	89	0	0	122	395	132	4	16	0
2002	85	265	88	-1	1	138	392	131	3	9	-3
2003	87	263	88	-1	1	132	390	130	2	4	-2
2004	91	276	92	+3	9	120	352	117	-11	121	-33
2005	98	284	95	+6	36	100	325	108	-20	400	-120
2006	95	-	-	-	-	105	-	-	-	-	-
Total	-	**1873**	ΣX 623	Σdx 0	Σd^2x 84			**896**	Σdy 0	Σd^2y 842	$\Sigma dxdy$ -260

$\overline{X} = {}^{\Sigma X}/_{N} = {}^{623}/_{7} = 89$ $\quad$ $\overline{Y} = {}^{\Sigma Y}/_{N} = {}^{896}/_{7} = 128$

dx= $(X-\overline{X})$

dy= $(Y-\overline{Y})$

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d^2x \,.\, \Sigma d^2x}} = \frac{-260}{\sqrt{84 \text{ X } 842}} = \frac{-260}{265.95} = -0.98$$

Thus, There is a trend of very high degree (near to perfect) negative correlation between supply and price in a long period.

उदाहरण (Illustration)- 14:

पूर्व उदाहरण संख्या १३ में दिये गये संमकों की सहायता से अल्पकालीन परिवर्तनों के मध्य सह–सम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए:

From the data given in the previous illustration-13 obtain the Coefficient of Correlation between Sort-term flunctuations:

Solution:

अल्पकालीन परिवर्तनों के मध्य सह–संबंध गुणक की गणना

Year	Supply				Price				
	Index No. (O)	Moving Average (X)	(O-X) dx	d^2x	Index No. (O)	Moving Average (Y)	(O-Y) dy	d^2y	dxdy
1998	76	-	-	-	152	-	-	-	-
1999	84	83	+1	1	145	144	+1	1	1
2000	88	88	0	0	135	134	+1	1	0
2001	93	89	+4	16	122	132	-10	100	-40
2002	85	88	-3	9	138	131	+7	49	-21
2003	87	88	-1	1	132	130	+2	4	-2
2004	91	92	-1	1	120	117	+3	9	-3
2005	98	95	+3	9	100	108	-8	64	-24
2006	95	-	-	-	105	-	-	-	-
				$\sum d^2x$ 37				$\sum d^2x$ 228	$\sum dxdy$ -89

$$r = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum d^2x \, . \, \sum d^2y}} = \frac{-89}{\sqrt{37 \text{ X } 228}} = \frac{-89}{91.85}$$

$$= -0.97$$

निर्वचन : अल्प काल में आपूर्ति तथा मूल्यों में बहुत अधिक मात्रा का ऋणात्मक सह सम्बन्ध है।

नोट :– काल श्रेणी में सह संबंध गुणांक ज्ञात करते समय अल्प कालीन उच्चावचनों का योग शून्य मानना चाहिए।

विलम्बन तथा अग्रगमन (Lag and Lead):

साधारणत: यह देखने में आता है किसी कारण का प्रभाव कुछ समय पश्चात् पड़ता है। कारण और प्रभाव के मध्य समय के अन्तर को विलम्बन कहा जाता है। कारण और प्रभाव में समयान्तर का प्रमुख कारण यह है कि कारण का घटना के होने पर उसका प्रभाव होते–होते कुछ समय लगता है। उदाहरणार्थ मुद्रा में प्रसार होने के कुछ समय पश्चात् वस्तुओं के मूल्य में वृद्धि होती है। इस मुद्रा प्रसार तथा मूल्यों में वृद्धि के मध्य उच्च कोटि का धनात्मक सम्बन्ध ही प्रत्याशित है, परन्तु कारण और प्रभाव के बीच समयान्तर होने के कारण सह–सम्बन्ध उस मात्रा या कोटि का नहीं होगा जैसा कि वास्तव में है। ऐसी स्थिति में सह–सम्बन्ध का अध्ययन करने के लिए कारण से सम्बन्धित समंकों को विलम्बित करने की आवश्यकता होगी अर्थात् प्रभाव सम्बन्धी समंकों को कुछ आगे से चलना पड़ेगा। उस क्रिया को विलम्बन और अग्रगमन कहते है। अत: **विलम्बन का अर्थ है कारण से पिछड़ जाना तथा अग्रगमन का अर्थ है प्रभाव का कारण का प्रभाव से पूर्व आना।**

इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है:

उदाहरण (Illustration)- 15:

प्रचलन में मुद्रा की मात्रा तथा सामान्य मूल्य स्तर मे यदि कोई सह–सम्बन्ध है तो ज्ञात कीजिए। इसके लिए यह माना जावे कि प्रचलन में मुद्रा की मात्रा का सामान्य मूल्य स्तर पर अगले वर्ष प्रभाव पड़ता है।

Find if there is any correlation between money in circulation and general price level supposing that the money in circulation effects the wholesale prices in the next year.

Years	Index No. of Money in circulation	Index No. of wholesale prices
1998	105	108
1999	111	113
2000	108	110
2001	102	115
2002	107	109
2003	115	102
2004	122	108
2005	116	122
2006	120	126
2007	122	118
2008	125	120

हल Solution:

प्रचलन में मुद्रा की मात्रा का सामान्य मूल्य स्तर पर अगले वर्ष प्रभाव पड़ता है। कारण एवं प्रभाव के बीच समयान्तर होने के कारण वास्तविक सह–संबंध ज्ञात करने के लिए कारण से संबंधित समंकों को विलम्बित करने की आवश्यकता है। वर्ष १९९८ में प्रचलन में मुद्रा की मात्रा का प्रभाव थोक मूल्यों पर वर्ष १९९९ में पड़ता है। अत: वर्ष १९९८ में प्रचलन में मुद्रा की मात्रा एवं वर्ष १९९९ के थोक मूल्यों के बीच कारण–प्रभाव संबंध है। इसी आधार पर श्रेणी को पुर्नव्यवस्थित करके सह–संबंध गुणक की गणना अगले पृष्ठ पर की गयी है।

सह–संबंध गुणक की गणना

Year	Index No.of Money in circulation (x)	A = 115 dx	d^2x	Index No. of wholesale prices (y)	A = 118 dy	d^2y	dxdy
1998	105	-10	100	113	-5	25	50
1999	111	-4	16	110	-8	64	32
2000	108	-7	49	115	-3	9	21
2001	102	-13	169	109	-9	81	117
2002	107	-8	64	102	-16	256	128
2003	115	0	0	108	-10	100	0
2004	122	+7	49	122	+4	16	28
2005	116	+1	1	126	+8	64	8
2006	120	+5	25	118	0	0	0
2007	122	+7	49	120	+2	4	14
N= 10		**Σdx -22**	**Σd^2x 552**		**Σdy 522**	**Σd^2y 619**	**$\Sigma dxdy$ 398**

$$r = \frac{\Sigma dxdy - \left(\Sigma dx.\Sigma dy/_N\right)}{\sqrt{\Sigma d^2x - (\Sigma dx)^2/_N} \text{ X } \sqrt{\Sigma d^2y - (\Sigma dy)^2/_N}}$$

$$= \frac{398 - \left(-22 \text{ x } -37/_{10}\right)}{\sqrt{522 - (-22)^2/_{10}} \text{ X } \sqrt{619 - (-37)^2/_{10}}}$$

$$= \frac{316.60}{477.83} = +0.6626$$

$$\therefore r = +0.6626$$

निर्वचन : प्रचलन में मुद्रा की मात्रा तथा सामान्य मूल्य स्तर मे मध्यम स्तरीय धनात्मक सह–सम्बन्ध है।

अभ्यासार्थ प्रश्न

SELF EXAMINATION QUESTIONS

A) OBJECTIVE ANSWER TYPE QUESTIONS

वस्तुनिष्ठ उत्तर वाले प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न का एक सही उत्तर लिखिए:-

१. सह-संबंध विश्लेषण का उद्देश्य:

(अ) दो चरों में संबंध स्थापित करने के लिए

(ब) दो चरों में संबंधों की मात्रा के मापन हेतु

(स) एक ज्ञात मद के लिए संभावित दूसरे चर के अनुमान लगाने हेतु

(द) अ तथा ब दोनो। ( )

२. सह-संबंध गुणक की सीमाएं क्या है ?

(अ) कोई सीमा नहीं

(ब) ० तथा १ दोनो सीमाओं को सम्मिलित करते हुए

(स) -१ तथा +१

(द) - १ तथा +१ दोनो सीमाओं सहित ( )

३. यदि सुन्दरता एवं बुद्धि में पूर्णरूप से भिन्नता हो तब कोटि अन्तर सह-संबंध गुणांक का मान होगा:-

(अ) केवल १

(ब) केवल-१

(स) कोई भी मान

(द) अ या ब ( )

४. भ्रामक सह-संबंध क्या होता है ?

(अ) यह दो चरों के मध्य बुरा संबंध होता है।

(ब) यह दो चरों के मध्य बहुत कम मात्रा का सह-संबंध होता है।

(स) यह ऐसे चरों के मध्य सह-संबंध होता है जिनमें कारण प्रभाव संबंध न हो।

(द) यह ऋणात्मक सह-संबंध होता है। ( )

५. विक्षेप चित्र का प्रयोग............के मापन हेतु किया जाता है।

(अ) दो चरों के मध्य रेखीय संबंध

(ब) दो चरों के मध्य वक्रीय संबंध

(स) अ तथा ब दोनों ही नहीं

(द) अ तथा ब दोनों ( )

६. यदि एक विक्षेप चित्र पर अंकित बिन्दु बायी ओर के ऊपरी भाग से दाहिनी ओर के नीचले भाग की तरफ स्थित हों, तब ऐसा सह-संबंध होगा:-

(अ) धनात्मक (ब) शून्य

(स) ऋणात्मक (द) अ या ब ( )

७. यदि एक विक्षेप चित्र पर अंकित बिन्दु समरूप से वितरीत हैं, तब ऐसा सह संबंध होगा।

(अ) शून्य (ब) ऋणात्मक

(स) धनात्मक (द) अ या ब ( )

८. यदि एक विक्षेप चित्र पर अंकित बिन्दु एक सीधी रेखा पर स्थित हो, तब ऐसा सह-संबंध होगा-

(अ) पूर्ण धनात्मक (ब) पूर्ण ऋणात्मक

(स) अ तथा ब दोनों (द) या तो अ या ब। ( )

९. जुत्तो के आकार एवं बुद्धिमता में सह-संबंध है:

(अ) शून्य (ब) ऋणात्मक

(स) धनात्मक (द) उपयुर्क्त में कोई नहीं ( )

१०. एक स्वचालित वाहन की गति तथा ब्रेक लगाने के पश्चात् इसके द्वारा तय की गयी दूरी के मध्य सह-संबंध है:

(अ) ऋणात्मक (ब) शून्य

(स) धनात्मक (द) उपयुक्त में कोई नहीं ( )

११. विक्षेप चित्र सहायक होता है।

(अ) दो चरों के मध्य सह-सम्बन्ध की प्रकृत्ति का पता लगाने के लिए।

(ब) दो चरों के मध्य सह-संबंध की मात्रा का पत्ता लगाने के लिए।

(स) दो चरो के मध्य गणितीय संबंध ज्ञात करने के लिए

(द) उपयुर्क्त अ तथा ब दोनो। ( )

१२. कार्ल-पीर्यसन का सह-संबंध गुणांक काम में लिया जाता है।

(अ) किसी भी प्रकार के सह-संबंध का पता लगाने के लिए।

(ब) रेखीय सह-संबंध का पता लगाने में लिए।

(स) वक्रीय सह-संबंध का पता लगाने के लिए।

(द) ब तथा स दोनों हेतु। ( )

१३. कार्ल पीयर्सन के सह-संबंध गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

(अ) सह-संबंध की प्रवृत्ति जानने हेतु।

(ब) सह-संबंध की मात्रा जानने हेतु।

(स) अ तथा ब दोनो हेतु।

(द) अ अथवा ब हेतु। ( )

१४. यदि सह संबंध गुणांक का मान धनात्मक हो, तब विक्षेप चित्र पर विभिन्न बिन्दुओं का समूहन होगा।

(अ) निचले बायें भाग से ऊपरी दाहिने भाग की तरफ।

(ब) निचले बायें भाग से निचले दाहिने भाग की तरफ।

(स) निचले दाहिने भाग से ऊपरी दाहिने भाग की तरफ।

(द) निचले दाहिने भाग से निचले दाहिने भाग की तरफ। ( )

१५. जब $r=1$ हो तब विक्षेप चित्र के सभी बिन्दु होंगे।

(अ) ऐसी सीधी रेखा पर जो निचले बायें भाग से ऊपरी दाहिने भाग की तरफ जा रही हो।

(ब) ऐसी सीधी रेखा पर जो ऊपरी बायें भाग से निचले दाहिने भाग की तरफ जा रही है।

(स) ऐसी सीधी रेखा पर

(द) अ तथा ब दोनों पर। ( )

१६. दो चरों के मध्य का सह-संबंध होता है:

(अ) निश्चित रूप से धनात्मक

(ब) निश्चित रूप से ऋणात्मक

(स) हमेशा शून्य

(द) या तो धनात्मक या ऋणात्मक या शून्य। ( )

लघुत्तरात्मक प्रश्न

१. कारण प्रभाव संबंधों के सिद्धान्त का वर्णन कीजिए।

२. सीमित मात्रा के सह-संबंध का वर्णन कीजिए।

३. विक्षेप-चित्र से आपका क्या आशय है ?

४. समान क्रमान्तरों के लिए समायोजन से आपका क्या अभिप्राय है ? इसका सूत्र भी लिखिए।

५. सह-संबंध गुणांक की सीमाओं को लिखिए।

६. यदि संगामी विचलनों के गुणनफलों का योग दो हैं तथा मदों की संख्या ९ है तब सह-संबंध गुणांक का मान ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : R_C=0.745)

७. निम्नांकित समंको से जनसंख्या को धनत्व (X) तथा मृत्यु दर (Y) का निर्धारण कीजिए:

जिला	क्षेत्रफल (वर्ग किमी)	जनसंख्या (हजारो में)	मृत्यु संख्या
A	120	24	288
B	150	75	1.125
C	80	48	768
D	50	40	720
E	200	50	650

(उत्तर : X श्रेणी - घनत्व- 200,500,600,800,250;
Y श्रेणी - मृत्यु दर- 12, 15, 16, 18, 13)

८. एक विद्यार्थियों के समूह द्वारा सांख्यिकीय एवं लेखांकन में प्राप्त किये गये अंकों के मध्य कोटि सह-संबंध ०.८ है। यदि कोटि अन्तरों के वर्गों का योग ३३ हो तो उस वर्ग के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : N=10)

स) निबन्धात्मक सैद्धान्तिक प्रश्न:

१. सह-संबंध की विचाराधारा का अर्थ एवं परिभाषाओं को स्पष्ट कीजिए। सह-संबंध गुणांक के निर्वचन से संबंधित सामान्य नियमों को लिखिए।

२. विक्षेप चित्र क्या है ? दो चरों के मध्य सह-संबंध की प्रकृत्ति एवं मात्रा के अध्ययन में यह किस प्रकार से सहायता पहुंचाता है।

३. दो चरों के मध्य सह-संबंध का मापन किस प्रकार से किया जाता है ? धनात्मक सह-सम्बन्ध तथा पूर्ण सह-संबंध से आप क्या समझते हैं ? यदि का मान शून्य हो तो इसका आप क्या अर्थ लगावेंगे ?

४. सह संबंध क्या है ? धनात्मक एवं ऋणात्मक सह-संबंध में अन्तर बताइए। एक विक्षेप चित्र की सहायता से आंशिक ऋणात्मक तथा पूण्र धनात्मक एवं पूर्ण ऋणात्मक स्थिति का चित्रण कीजिए।

५. कोटि-अन्तर सह-संबंध क्या है ? दो चरों के मध्य कोटि अन्तर विधि तथा कार्ल-पीयर्सन विधि से सह-संबंध ज्ञात कने में अन्तर को स्पष्ट कीजिए।

६. निम्नांकित पर टिप्पणी लिखिए:-

(अ.) विक्षेप चित्र

(ब.) रेखीय तथा वक्र रेखीय सह-संबंध

(स.) कोटि सह-संबंध

(द.) संगामी विचनल गुणक।

७. कारण एवं प्रभाव के सिद्धान्त को स्पष्ट कीजिए। उन दशाओं का वर्णन कीजिए जिनमें सह-संबंध भ्रामक सह-संबंध कहलाता है।

८. संगामी विचलन गुणक क्या है ? इसकी गणना किस प्रकार से की जाती है ?

द) संख्यात्मक/व्यावहारिक प्रश्न:

१. निम्नांकित समंको से सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए:-

Calculate the coefficient from the following data:

X:	78	89	97	69	59	79	68	61
Y:	125	137	156	112	107	136	123	108

Use 69 as assumed mean for 'X' and 112 for 'Y'.

X श्रेणी के लिए काल्पनिक माध्य ६९ तथा Y श्रेणी के लिए काल्पनिक माध्य ११२ का प्रयोग करें।

(Answer: r = +0.9570)

२. निम्नांकित तालिका लागत लेखांकन एवं सांख्यिकीय में १० विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किये गये अंक दिये हुए हैं, सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए:-

The following table shows the marks obtained by 10 students in cost accounting and statistics, find the coefficient of correlation:

Students:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Cost Accounting:	105	105	102	101	100	99	98	96	93	92
Statistics:	101	103	100	98	95	96	104	92	97	93

(Answer: r = +0.6343)

३. निम्नांकित समंको से कार्ल-पीयर्सन की विधि से सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए:

From the following data, calculate the coefficient of correlation by Karl Pearson's method.

X :	6	2	10	4	8
Y :	9	11	?	8	7

Arithmetic means of X and Y series are 6 and 8 respectively.

X तथा Y श्रेणियों के समान्तर माध्य क्रमशः ६ तथा ८ हैं।

(Answer: r = -0.919)

४. Xतथा Y श्रेणी के लिए काल्पनिक माध्यों से निकाले गये विचलन निम्न प्रकार से है, कार्ल-पीयर्सन का सह-संबंध गुणक कीजिए तथा स्पष्ट कीजिए कि यह महत्वपूर्ण है अथवा नहीं

The following are the deviations of the values of the values of X and Y series from the respective assumed means. Find out Karl Pearson's correlation coefficient and explain whether it is significant or not:

X:	+5	-4	-2	+20	-10	0	+3	0	-15	-5
Y:	+5	-12	-7	+25	-10	-3	0	+2	-9	-15

(Answer: r = +0.896; P.E. = 0.04, Significant)

५. निम्नांकित समंकों से यह ज्ञात कीजिए की जनसंख्या के धनत्व तथा मृत्यु दर में क्या कोई सह-संबंध है।

From the following data find out if there is any relationship between density of population and death rate:

District	Area in sq. km	Population	No. of deaths
A	150	30,000	300
B	180	90,000	1440
C	100	40,000	560
D	60	42,000	840
E	120	72,000	1224
F	80	24,000	312

(Answer: r = 0.9877)

६. निम्नांकित विद्यार्थियों की आयु तथा खेलने की आदत में सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए-

Find out correlation coefficient between age and playing habit of the following students:

Age Group:	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
No. of Students:	200	270	340	360	400	300
Regular Players:	150	162	170	180	180	120

(Answer: r = -0.94)

७. निम्नांकित सूचनाओं से ज्ञात कीजिए कि क्या आयु तथा अशिक्षा में कोई महत्वपूर्ण सह-संबंध है:

From the following information, calculate if there is significant correlation between age and illiteracy:

Age (in years)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
Total Population (in '000)	120	100	80	50	25	15	5
Illiterate Population (in '00)	100	75	60	30	20	10	5

(Answer: r = +0.23, P.E. = 0.23, not significant)

८. निम्नांकित सूचना एक वर्ष की वर्षा से. मी. तथा गेहूं का उत्पादन (०० हजार क्विटंल) रवि एवं खरीफ फसलों का के संबंध में दी हुई है। क्या उत्पादन तथा वर्षा की मात्रा में कोई सह-संबंध है?

Following figures give the rainfall in centimeters for one year and the production of wheat (in 00's of quintals for the rabi crop and kharif crop). Is there any correlation between production of wheat and rainfall?

Rainfall (in cm):	20	22	24	26	28	30	32
Rabi production Of crop:	15	18	20	32	40	39	40
Kharif production Of crop:	5	17	20	18	20	21	15

(Answer: r = 0.917)

९. निम्नांकित आयु तथा परीक्षा में सफल अभ्यार्थियों की संख्या में क्या कोई सह–संबंध है ? इसकी गणना कीजिए।

Is there significant correlation between following age and successful candidates in the examination? Calculate it.

Age of Candidates	Candidates Appeared	Candidates Successful	Age of Candidates	Candidates Appeared	Candidates Successful
13-14	200	124	18-19	400	252
14-15	300	180	19-20	250	145
15-16	100	65	20-21	150	81
16-17	50	34	21-22	25	12
17-18	150	99	22-23	75	33

(Answer: r = -0.7744, P.E. = 0.084)(r is significant)

१०. निम्नांकित समंकों से कोटि सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

Calculate the rank coefficient of correlation.

X:	75	88	95	70	60	80	81	50
Y:	120	134	150	115	110	140	142	100

(Answer: r = +0.93)

११. निम्नांकित समंकों से कोटि सह–संबंध गुणांक की गणना कीजिए।

Calculate coefficient of correlation from the following data:

Marks in Statistics	Marks in Economics 5-15	15-25	25-35	35-45	Total
0-10	1	1	-	-	2
10-20	3	6	5	1	15
20-30	1	8	9	2	20
30-40	-	3	9	3	15
40-50	-	-	4	4	8
Total	5	18	27	10	60

(Answer: r=0.53)

१२. दो निर्णायकों ने एक सौन्दर्य प्रतियोगिता में ७ अभ्यार्थियों को निम्न प्रकार से कोटि प्रदान की, कोटि सह–संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

Two judges have assigned ranks to seven candidates in a beauty contest as given below:

Contestant:	A	B	C	D	E	F	G
Judge I:	3	1	4	5	2	7	6
Judge II:	2	4	3	5	1	6	7

Find out rank coefficient of correlation.

(Answer: r = +0.75)

१३. निम्नांकित समंकों से स्पीयर मैन का सह-संबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

Calculate the Spearman's coefficient of rank correlation from the following data:

Student No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marks in Accountancy	45	70	65	30	95	40	50	75	85	62
Marks in Statistics	35	90	70	40	95	40	60	85	85	50

(Answer: r = +0.903)

१४. एक सौन्दर्य प्रतियोगिता में तीन निर्णायकों द्वारा निम्न प्रकार से कोटि प्रदान की गयी। कोटि अन्तर विधि का प्रयोग करते हुए यह बताइए कि निर्णायकों के किस युग्म में सुन्दरता के प्रति एक जैसी भावना है।

The competitors in a beauty contest are ranked by three judges in the following order:

I Judge:	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
II Judge:	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
III Judge:	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

Use the rank correlation to discuss which pair of judges has the nearest approach to common taste in beauty.

(Answer: rR1-2 = -0.21,rR1-3 = +0.64, rR2-3 = -0.297)

१५. १६ विद्यार्थियों द्वारा X तथा Y विषयों में प्राप्त किये गये अंक उनकी कोटि के अनुसार नीचे दिये गये हैं। कोष्ठक में क्रमशः X तथा Y की कोटि दी हुई है। स्पीयर मैन के सूत्र का प्रयोग करते हुए सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए:-

Marks obtained by 16 students in subjects X and Y are given in rank order, ranks given in brackets represent the rank in subject X and Y. Calculate rank coefficient of correlation by using Spearman's formula:

(1,1) (2,10) (3,3) (4,4) (5,5) (6,7) (7,2) (8,6) (9,8)
(10,11)(11,15) (12,9) (13,14) (14,12) (15,16) (16,13)

(Answer: rR = 0.8)

१६. निम्नाकिंत समंको से संगामी विचलन विधि द्वारा सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए।

Calculate correlation coefficient by concurrent deviation method from the following data:

X:	70	72	75	75	78	80	82	83	84	84	90
Y:	48	49	52	52	50	53	54	55	60	61	62

(Answer: rc = +0.77)

१७. निम्नांकित समंको से X तथा Y श्रेणी में सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए।

From the data given below, calculate coefficient of correlation between X & Y series:

	X	Y
No. of items मदों की संख्या	6	6
Arithmetic mean समान्तर माध्य	82	103
Sum of deviation from assumed mean काल्पनिक माध्यों से लिये गये विचलनों का योग	-6	27

Square of the deviation from assumed mean
काल्पनिक माध्यों से लिये गये विचलनों के वर्गों का योग 1220 7180
Sum of product of deviation of X & Y series
X तथा Y श्रेणियों के विचलनों के गुणनफलों का योग 2872
(Answer: r = 0.99)

१८. निम्नांकित समंको से, सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए तथा परिणाम का निर्वचन कीजिए।
From the data given below, calculate coefficient of correlation and interpret it.

	X	Y
Number of items मदों की संख्या	8	8
Mean माध्य	68	69
Sum of squares of deviations from mean माध्यों से लिए गये विचलनों के वर्गों का योग	36	44
Sum of products of deviations of X & Y series X तथा Y श्रेणियों के विचलनों के गुणनफलों का योग	24.	

(Answer: r=0.602. X तथा Y श्रेणियों में मध्यम स्तरीय धनात्मक सह-संबंध है।)

१९. निम्नलिखित काल श्रेणी के दीर्घकालीन उच्चावचनों में सह-संबंध गुणक तीन वर्षीय चल माध्यों के आधार पर ज्ञात कीजिए तथा चल माध्यों की गणना में दशमलव बिन्दु को छोड़ दीजिए।
From the following data obtain the coefficient of correlation between the long term fluctuations taking 3 years moving average and ignoring points in computing moving averages:

Year	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
supply Index	80	82	86	91	83	85	89	96	93
Price Index	147	140	130	117	133	127	115	95	100

२०. प्र. सं. १९ में दी गयी सूचनाओं की सहायता से अल्पकालीन परिवर्तनों के मध्य सह-संबंध गुणक की गणना कीजिए।
Calculate the Karl Pearson's coefficient of correlation of the short term fluctuations from the data given in Q. No. 19. (Answer: -0.99)

२१. मांग सूचकांक तथा मूल्य सूचककों में यदि कोई संबंध हो तो सह-संबंध गुणक ज्ञात कीजिए। मूल्य परिवर्तन का असर मांग पर एक वर्ष पश्चात् पड़ता है।
Find out the coefficient of correlation if there is any relation between the demand index and the price index. The later affects the former after a year:

वर्ष	मांग सूचकांक	मूल्य सूचकांक	वर्ष	मांग सूचकांक	मूल्य सूचकांक
1997	101	110	2003	202	75
1998	108	117	2004	207	70
1999	105	97	2005	204	75
2000	145	102	2006	198	80
2001	153	88	2007	200	81
2002	186	72	2008	208	78

(Answer - r= - 0.96)

खण्ड (Section)- C
अध्याय (Chapter)- 2
प्रतीपगमन विश्लेषण
(Regression Analysis)

---

१. अवधारणा

२. अर्थ

३. परिभाषाएं

४. सह–सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर

५. प्रतीपगमन के प्रकार

६. प्रतीपगमन रेखायें

७. रेखाचित्र विधि द्वारा प्रतीपगमन रेखायें खिंचना

८. प्रतीपगमन समीकरण द्वारा प्रतीपगमन रेखायें खिंचना

९. प्रतीपगमन गुणक

१०. द्विचर आवृति बंटन में प्रतीपगमन समीकरणें का निर्धारण

११. दिये गये समीकरणों से माध्य मूल्यों एवं प्रतीपगमन गुणकों की गणना करना

१२. प्रतीपगमन समीकरणों की गणना हेतु न्यूनतम वर्ग विधि

१३. अनुमान की प्रमाप त्रुटि

१४. प्रतीपगमन विश्लेषण की उपयोगिता

१५. अभ्यासार्थ प्रश्न

खण्ड (Section)- C

अध्याय (Chapter)- 2

प्रतीपगमन विश्लेषण
(Regression Analysis)

अवधारणा (Concept)

दो सम्बन्धित चरों में आपसी संबंधों की दिशा एवं मात्रा का पता सह-संबंध विश्लेषण तकनीक से लगाया जाता है। परन्तु एक ज्ञात स्वतन्त्र चर के मूल्य के आधार पर तत्संबंधी आश्रित चर के मूल्य का अनुमान सह-संबंध विश्लेषण तकनीक की सहायता से नहीं लगाया जा सकता है। इसके लिए प्रतीपगमन विश्लेषण तकनीक की सहायता ली जाती है। इस तकनीक का सांख्यिकी में सर्वप्रथम प्रयोग 'गाल्टन (Galton)' ने १८७७ में किया।

अर्थ (Meaning)

प्रतीपगमन शब्द का शाब्दिक अर्थ 'पीछे लौटना (Moving Backward)' अथवा 'मध्यमता की ओर लौटना (Return to the mean value)' से है। प्रतीपगमन विश्लेषण के आधार पर विभिन्न घटनाओं के माध्य संबंधों का विश्लेषण करके एक चर मूल्य से संबन्धित दूसरे आश्रित चर मूल्य (dependent variable) का अनुमान लगाया जा सकता है। जो रेखा 'पीछे लौटने' (Moving Back) की प्रवृति का वर्णन करती है उसे 'प्रतीपगमन रेखा' कहा जाता है।

'प्रतीपगमन विश्लेषण' के अन्तर्गत चरों के मध्य 'कारण एवं प्रभाव' संबंध को स्पष्ट रूप से व्यक्त किया जाता है परन्तु सह-सम्बन्ध विश्लेषण में कारण-प्रभाव सम्बन्ध को स्पष्ट नहीं किया जाता है। प्रतीपगमन विश्लेषण में स्वतंत्र चर को कारण एवं 'आश्रित चर' को प्रभाव माना जाता है।

परिभाषाएं (Definitions)

'प्रतीपगमन' (Regression) की कुछ परिभाषाएं निम्न प्रकार हैं-

१. मूल इकाइयों के रूप में दो या दो से अधिक चरों में पारस्परिक औसत संबंध का माप ही प्रतीपगमन है।

- एम. एम. ब्लेयर (- M. M. Blair)

२. दो या दो से अधिक कार्य कारण संबंधों से संबन्धित चरों के मध्य संबंध ज्ञात करने के लिए जो विधि अर्थशास्त्र एवं व्यावसायिक शोध में अत्यधिक प्रयुक्त की जाती है, प्रतीपगमन विश्लेषण कहलाती है।

-तारो यामने (- Taro Yamane)

उपर्युंक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि प्रतीपगमन विश्लेषण संमकों की मूल इकाई के रूप में दो या दो से अधिक चरों में पारस्परिक औसत संबंधों के मापन का गणितीय माप है।

सह-सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर

(Differences between Correlation and Regression)

१. कारण एवं परिणाम सम्बन्ध: सह-सम्बन्ध की अपेक्षा प्रतीपगमन विश्लेषण कारण एवं परिणाम संबंध को अधिक स्पष्ट रूप से व्यक्त करता है।

२. सम्बन्ध की मात्रा एवं प्रकृति: सह-सम्बन्ध दो या अधिक चरों के मध्य सह-विचरण (Co-variability) की मात्रा का मापन करता है जबकि प्रतीपगमन विश्लेषण इस सह-विचरण की प्रकृति एवं मात्रा का मापन कर हमें भावी अनुमान की क्षमता प्रदान करता है।

३. आधार (Origin) **एवं पैमाने** (Scale) **में परिवर्तन का प्रभावः** सह–सम्बन्ध मापन में आधार एवं पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव नहीं पड़ता है जबकि प्रतीपगमन विश्लेषण में आधार परिवर्तन का प्रभाव नहीं पड़ता है परन्तु पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव पड़ता है।

प्रतीपगमन के प्रकार (Type of Regression):

(i) सरल प्रतीपगमन (Simple Regression)
(ii) बहुगुणी प्रतीपगमन (Multiple Regression)
(iii) रेखीय प्रतीपगमन (Linear Regression)
(iv) वक्रीय प्रतीपगमन (Curvilinear Regression)

(i) सरल प्रतीपगमन (Simple Regression): यदि एक ही समय पर केवल दो चरों के मध्य औसत संबंध का अध्ययन किया जावे तो यह सरल प्रतीपगमन कहलाता है।

(ii) बहुगुणी प्रतीपगमन (Multiple Regression): जब प्रतीपगमन विश्लेषण तकनीक का उपयोग दो से अधिक चरों के पारस्परिक संबंधों के विश्लेषण के लिये किया जाता है तो इसे बहुगुणी प्रतीपगमन कहा जाता है।

(iii) रेखीय प्रतीपगमन (Linear Regression): जब स्वतन्त्र चर में इकाई परिवर्तन किया जावे तो आश्रित चर में एक निश्चित मात्रा में परिवर्तन होता हो तब दोनों चरों के मध्य के औसत संबंध को रेखा चित्र पर एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है तथा इस प्रकार के प्रतीपगमन को रेखीय प्रतीपगमन कहा जाता है।

चरों के मध्य रेखीय संबंध **'न्यूनतम वर्ग विधि के सिद्धांत'** पर आधारित होता है। रेखीय प्रतीपगमन को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$$\mathbf{Y_c = a + bX}$$

(iv) वक्रीय प्रतीपगमन (Curvilinear Regression): जब स्वतन्त्र चर में इकाई परिवर्तन किया जावे तो आश्रित चर में एक निश्चित मात्रा में परिवर्तन नहीं होता हो तब रेखा चित्र पर दोनों चरों के मध्य के औसत संबंध को एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है वरन् एक वक्र के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। इस प्रकार के प्रतीपगमन को वक्रीय प्रतीपगमन कहा जाता है।

वक्रीय प्रतीपगमन को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$$\boxed{\mathbf{Y_c = a + bX + CX^2}}$$

प्रतीपगमन रेखायें (Regression Lines)

दो चरों (X एवं Y) के पारस्परिक संबंध को प्रकट करने वाली श्रेष्ठतम आसंजन रेखा (Line of best fit) को सरल प्रतीपगमन रेखा (Simple Regression Line) कहते है। इस रेखा की सहायता से स्वतन्त्र चर के दिये हुए मान के लिए तत्संबंधी आश्रित चर का श्रेष्ठतम आकलित मान ज्ञात कर सकते है।

यदि दो चर X एवं Y दिये गये हो तो दो प्रतीपगमन रेखायें खींची जावेंगी:

१. X की Y पर प्रतीपगमन रेखा; एवं
२. Y की X पर प्रतीपगमन रेखा।

'X की Y पर प्रतीपगमन रेखा' द्वारा Y के प्रदत मान के लिए X का श्रेष्ठतम सम्भाव्य (Best Possible) मान ज्ञात कर सकते है जबकि **'Y की X पर प्रतीपगमन रेखा'** द्वारा X के प्रदत मान के लिए Y का श्रेष्ठतम सम्भाव्य (Best Possible) मान ज्ञात कर सकते है।

यदि दो चरों के मध्य पूर्ण धनात्मक अथवा पूर्ण ऋणात्मक सह–सम्बन्ध हो तो ऐसी दशा में केवल एक ही प्रतीपगमन रेखा होगी।

प्रतीगमन रेखाएं खींचने की विधियां (Method of Drawing Regression Lines)

(i) रेखाचित्र विधि (Grapic Method)

(ii) प्रतीपगमन समीकरण विधि (Regression Equation Method)

(A) प्रतीपगमन गुणांक विधि (Coefficient of Regression Method)

(B) न्यूनतम वर्ग विधि (Least Squre Method)

(i) रेखाचित्र विधि द्वारा प्रतीपगमन रेखायें खिंचना (Drawing Regression Lines through Graph)

इस विधि के अन्तर्गत संबन्धित चर युग्मों को रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है। इन बिन्दुओं से एक विक्षेप चित्र (Scattet Diagram) की आकृति प्रदर्शित होती है। इन बिन्दुओं के बीच से एक प्रतीपगमन रेखा या तो मुक्त हस्त से (By Free Hand) या पैमाना नियम (Scale Rule) से इस प्रकार खिंची जाती है जिससे क्षैतिज एवं लम्बवत् विचलन वर्गों का योग न्यूनतम हो जावे।

इस विधि से एक श्रेष्ठतम आसंजन रेखा खिंचा जाना बहुत ही कठिन है इसलिए यह विधि आश्रित चर का श्रेष्ठतम सम्भाव्य मूल्य ज्ञात करने के लिए उपयुक्त नहीं है।

(ii) प्रतीपगमन समीकरण द्वारा प्रतीपगमन रेखायें खिंचना (Drawing Regression Lines through Regression equations)

प्रतीपगमन समीकरण प्रतीपगमन रेखाओं का बीजगणितीय रूप होता है। हम जानते है कि दो प्रतीपगमन रेखाएं होती है और एक सरल रेखा को एक सरल समीकरण द्वरा प्रदर्शित किया जा सकता है। अत: दो प्रतीपगमन रेखाओं को प्रदर्शित करन के लिए दो सरल समीकरणों का उपयोग किया जाना आवश्यक है जिन्हें हम प्रतीपगमन समीकरण कहते है। निम्नांकित दो प्रतीपगमन समीकरण होते हैं:

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण; एवं

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण।

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण:

इस समीकरण के आधार पर Y के प्रदत मूल्य के लिए X का श्रेष्ठतम सम्भाव्य मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। जब X के आंकलित मूल्यों (Computed Values) को रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है तब X की Y पर प्रतीपगमन रेखा का निर्माण हो जाता है। X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{X = a + bY}$$

जहां कि:

X = स्वतन्त्र चर Y के लिए X का श्रेष्ठतम सम्भाव्य मूल्य

Y = दिये गये स्वतन्त्र चर Y का मूल्य

b = X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

a = रेखाचित्र पर प्रतीपगमन रेखा का प्रारम्भिक बिन्दु जिसका मान स्थिर होता है।

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण:

इस समीकरण के आधार पर X के प्रदत मूल्य के लिए Y का श्रेष्ठतम सम्भाव्य मूल्य ज्ञात किया जाता है। जब Y के आंकलित मूल्यों (Computed Values) को रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है तब Y की X पर प्रतीपगमन रेखा का निर्माण हो जाता है। Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{Y = a + bX}$$

जहां कि:

X = दिये गये स्वतन्त्र चर X का मूल्य

Y = स्वतन्त्र चर X के लिए Y का श्रेष्ठतम सम्भाव्य मूल्य

b = Y का X पर प्रतीपगमन गुणक

a = रेखाचित्र पर प्रतीपगमन रेखा का प्रारम्भिक बिन्दु जिसका मान स्थिर होता है।

नोटः 'a' तथा 'b' का मान स्थिर रहता है तथा इन्हें प्रतीपगमन प्राचल (Regression Parameters) कहते है।

प्राचल 'b' या प्रतीपगमन गुणक
(Parameter 'b' or Regression Coefficients)

प्रतीपगमन गुणक वह अनुपात है जो प्रतीपगमन रेखा के ढ़ाल को इंगित करता है। यह अनुपात इस बात को प्रदर्शित करता है कि स्वतन्त्र चर में एक इकाई का परिवर्तन होने से आश्रित चर में कितना परिवर्तन होगा। प्रतीपगमन समीकरणों की भांति प्रतीपगमन गुणक भी दो ही होते है:

(i) X का Y पर प्रतीपगमन गुणक; तथा

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन गुणक।

(i) X का Y पर प्रतीपगमन गुणक (Regression Coefficient of X on Y): यह Y चर में एक इकाई परिवर्तन होने पर X चर में होने वाले सम्भावित परिवर्तन की मात्रा को प्रदर्शित करता है। इसे साधरणतया bxy से प्रदर्शित किया जाता है। इसका मापन निम्न सूत्रों की सहायता से किया जा सकता है:

(A) आधारभूत सूत्रः (Basic Formula) :

$$bxy = \frac{r \times \sigma_x}{\sigma_y}$$

जहां कि

bxy = X का Y पर प्रतीपगमन गुणक

r = सह–संबंध गुणांक

σx = X चरों का प्रमाप विचलन

σy = Y चरों का प्रमाप विचलन

(B) प्रत्यक्ष विधि : (Direct Method) :

यदि विचलन समान्तर माध्यों से निकाले गये हों तो विचलनों का योग शून्य होगा तथा निम्न सूत्र का प्रयोग किया जावेगा:

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2y}$$

जहां कि

$dx = (X-\overline{X})$

$dy = (Y-\overline{Y})$

$\Sigma dx = 0$

$\Sigma dy = 0$

(C) अप्रत्यक्ष विधि : (Indirect Method) :

यदि विचलन कल्पित माध्यों (Assumed Means) से लिये गये हों तो विचलनों का योग शून्य नहीं होगा तथा निम्न सूत्र का प्रयोग किया जावेगा:

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy - \left({}^{\Sigma dx.\Sigma dy}/_{N}\right)}{\Sigma d^2y - {}^{(\Sigma dy)^2}/_{N}}$$

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन गुणक (Regression Coefficient of Y on X): यह X चर में एक इकाई परिवर्तन होने पर Y चर में होने वाले सम्भावित परिवर्तन की मात्रा को प्रदर्शित करता है। इसे साधरणतया byx से प्रदर्शित किया जाता है। इसका मापन निम्न सूत्रों की सहायता से किया जा सकता है:

(A) आधारभूत सूत्र: (Basic Formula) :

$$byx = \frac{r \times \sigma_y}{\sigma_x}$$

(B) प्रत्यक्ष विधि : (Direct Method) :

$$byx = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2x}$$

(C) अप्रत्यक्ष विधि : (Indirect Method) :

$$byx = \frac{\Sigma dxdy - \left({}^{\Sigma dx.\Sigma dy}/_{N}\right)}{\Sigma d^2x - {}^{(\Sigma dx)^2}/_{N}}$$

संकेताक्षर पूर्व में बताये अनुसार ही है।

टिप्पणी (Note):

(i) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्ह एक जैसे ही होने चाहिए अर्थात् या तो धनात्मक (+) या ऋणात्मक (–).

(ii) सह–सम्बन्ध गुणांक (r) के चिन्ह के आधार पर ही प्रतीपगमन गुणांक के चिन्ह होते हैं। यदि सह–सम्बन्ध गुणांक धनात्मक है तो दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्ह भी धनात्मक होंगे इसके विपरीत यदि सह–सम्बन्ध गुणांक ऋणात्मक है तो दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्ह भी ऋणात्मक ही होंगे।

(iii) प्रतीपगमन गुणांकों का गुणोत्तर माध्य ही सह–सम्बन्ध गुणांक होता है अर्थात्

$$r = \pm\sqrt{(bxy \times byx)}$$

प्रतीपगमन गुणांकों का चिन्ह ही वर्गमूल के बाहर रखा जावेगा।

उदाहरणार्थ, यदि bxy = -1.50 तथा byx = -0.4 हो तो सह–सम्बन्ध गुणांक का मान होगा:

$$r = \pm\sqrt{(-1.50 \times -0.4)}$$

$$r = -\sqrt{+0.60} \qquad = -0.775$$

r का मान –०.७७५ होगा न कि +०.७७५ क्योंकि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों का चिन्ह ऋणात्मक है।

(iv) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों का मान **एक** से अधिक नहीं हो सकता है क्योंकि सह–सम्बन्ध गुणांक का मान **एक** से अधिक नहीं होता है।

प्राचल 'a' की गणना
(Computation of Parameter 'a')

रेखा-चित्र के जिस बिन्दु पर प्रतीपगमन रेखा प्रारम्भ होती है वह बिन्दु 'a' से प्रदर्शित किया जाता है। जब स्वतन्त्र चर का मान शून्य (०) हो तब उससे सम्बन्धित आश्रित चर का सर्वोत्तम सम्भाव्य मूल्य ही प्रतीपगमन रेखा का प्रारम्भिक बिन्दु (a) कहलायेगा।

प्रतीपगमन गुणांकों की गणना के पश्चात् 'a' का मान निम्नांकित समीकरणों को हल करके किया जा सकता है:

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः

$X = a + bY$

या

$(X-\overline{X}) = bxy(Y-\overline{Y})$

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरणः

$Y = a + bX$

या

$(Y-\overline{Y}) = byx(X-\overline{X})$

उदाहरण (Illustration)-१:

प्रतीपगमन गुणांकों के आधार पर दोनों प्रतीपगमन समीकरणों की गणना कीजिए:

पिता की ऊँचाई (ईंचों में)	६२	६४	६६	६७	६८	६८	६९	७१	७२	७३
पुत्रों की ऊँचाई (ईंचों में)	६३	६२	६५	६७	६७	७०	७०	६७	६८	७१

हल (Solution) :

प्रतीपगमन समीकरणों की गणना

X	dx (X-65)	dx^2	Y	dy (Y-65)	dy^2	dxdy
62	-3	9	63	-2	4	+6
64	-1	1	62	-3	9	+3
66	+1	1	65	0	0	0
67	+2	4	67	+2	4	+4
68	+3	9	67	+2	4	+6
68	+3	9	70	+5	25	+15
69	+4	16	70	+5	25	+20
71	+6	36	67	+2	4	+12
72	+7	49	68	+3	9	+21
73	+8	64	71	+6	36	+48
N=10	+30 Σdx	198 Σdx^2	N=10	+20 Σdy	120 Σdy^2	+135 $\Sigma dxdy$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N} = 65 + \frac{30}{10}$$

$$= 65+3 = 68$$

$$\bar{Y} = A + \frac{\Sigma dy}{N} = 65 + \frac{20}{10}$$

$$= 65+2 = 67$$

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक की गणना

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy - \frac{(\Sigma dx \cdot \Sigma dy)}{N}}{\Sigma d^2y - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$$

$$\text{या } bxy = \frac{135 - \frac{(30 \times 20)}{10}}{120 - \frac{(20)^2}{10}}$$

$$\text{या } bxy = \frac{135 - 60}{120 - 40} = \frac{75}{80}$$

$$\text{या } bxy = +0.9375$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक की गणना

$$byx = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \cdot \Sigma dy}{N}}{\Sigma d^2x - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

$$\text{या } byx = \frac{135 - \frac{(30 \times 20)}{10}}{198 - \frac{(30)^2}{10}}$$

$$\text{या } byx = \frac{175}{108} = +0.694$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$X = a + bY$

या $(X-\bar{X}) = bxy\,(Y-\bar{Y})$

या $(X-68) = 0.9375\,(Y-67)$

या $X = 68 + 0.9375Y - 62.8125$

या $X = 5.1875 + 0.9375Y$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$$Y = a + bx$$

or $(Y-\overline{Y}) = byx\,(X - \overline{X})$

or $(Y-67) = 0.694\,(X - 68)$

or $Y - 67 = 0.694\,X - 47.192$

or $Y = 67 + 0.694\,X - 47.192$

or $Y = 19.808 + 0.694\,X$

अतः

(i) **X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः**

$$X = 5.1875 + 0.9375Y$$

(ii) **Y का X पर प्रतीपगमन समीकरणः**

$$Y = 19.808 + 0.694\,X$$

उदाहरण (Illustration)-२ः

निम्नलिखित समंकों से उपज का अनुमान लगाइये यदि वर्षा ९ इन्च होः

From the following data estimate the yield when rainfall is 9 inches

	समान्तर माध्य	माध्य विचलन
गेहूं की उपज (प्रति इकाई क्षेत्रफल के लिए कि.ग्राम में)	१०	८
वार्षिक वर्षा (इंचों में)	८	२

सह-सम्बन्ध गुणांक (r) = + ०.५०

हल (Solution) :

माना कि गेहूं की उपज को चर X से तथा वर्षा की मात्रा को Y चर से प्रदर्शित किया जाता है। यदि Y= 9 हो तो X का सम्भावित मान ज्ञात करना है। इसके लिए X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करना होगा।

दिया हुआ हैः $\overline{X} = 10, \overline{Y} = 8, \sigma x = 8, \sigma y = 2, r = 0.5$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण : $X = a + bY$

या $(X-\overline{X}) = r\,\sigma x/\sigma y\,(Y-\overline{Y})$

उपर्युक्त समीकरण में मान रखने परः

$$X - 10 = \frac{5 \text{ X } 8}{2}(Y - 8)$$

या $X - 10 = 2\,(Y - 8)$

या $X - 10 = 2Y - 16$

या $X = 2Y - 16 + 10$ या $X = -6 + 2Y$

यदि Y = 9,

अतः $X = -6 + (9x2)$ या $X = 12$

जब वार्षिक वर्षा ९ इंच हो तो सम्भावित गेहूं की उपज १२ किलो ग्राम प्रति इकाई क्षेत्रफल होगी।

उदाहरण (Illustration)–३:

निम्नलिखित समंक १००० व्यावसायिक अधिकारियों की ऊँचाई (X) तथा वजन (Y) से सम्बन्धित हैं:

औसत ऊँचाई= ६८"   ऊँचाई का प्रमाप विचलन= २.५"

औसत वजन = १५० lbs.   वजन का प्रमाप विचलन= २० lbs.

सह–सम्बन्ध गुणक (r) = 0.6

आपको ज्ञात करना है: (अ) अनुमानित ऊँचाई यदि अधिकारी का वजन २०० पौण्ड हो,

(ब) अनुमानित वजन यदि अधिकारी का वजन ६० इंच हो।

हल (Solution) :

ऊँचाई (X) का अनुमान लगाना :

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण:

$$X - \overline{X} = r\,\frac{\sigma x}{\sigma y}\,(Y - \overline{Y})$$

$$X - 68 = \frac{.6\mathbf{x}\,2.5}{20}\,(Y - 150)$$

या $X - 68 = .075\,Y - 11.25$

या $X = 56.75 + 0.075Y$

यदि वजन (Y) २०० पौण्ड हो, तब अनुमानित ऊँचाई (X) होगी:

$X = 56.75 + .075\,(200)$

या $X = 71.75"$

वजन (Y) का अनुमान लगाना :

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण:

$$Y - \overline{Y} = r\,\frac{\sigma y}{\sigma x}\,(X - \overline{X})$$

$$Y - 150 = \frac{.6\,\mathbf{x}\,20}{25}\,(X - 68)$$

या $Y - 150 = 4.8\,X - 326.4$

$Y = -176.4 + 4.8\,X$

यदि ऊँचाई (X) ६० इंच हो, तब अनुमानित वजन (Y) होगा:

$Y = -176.4 + 4.8(60)$

या $Y = 111.6"$

उदाहरण (Illustration)–४:

निम्नांकित समंकों से दोनों प्रतीपगमन समीकरण रेखाएं खींचिए:

X	1	2	3	4	5
Y	2	5	3	8	7

हल (Solution) :

प्रतीपगमन समीकरणों की गणना

X	dx (X-2)	d^2x	Y	dy (Y-4)	d^2y	dxdy
1	-1	1	2	-2	4	2
2	0	0	5	+1	1	0
3	+1	1	3	-1	1	-1
4	+2	4	8	+4	16	8
5	+3	9	7	+3	9	9
	+5 Σdx	15 Σd^2x		+5 Σdy	31 Σd^2y	18 $\Sigma dxdy$

X तथा Y श्रेणियों के समान्तर माध्यों की गणना:

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N} = 2 + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3, \quad \overline{Y} = A + \frac{\Sigma dy}{N} = 4 + \frac{5}{5} = 4 + 1 = 5$$

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक (bxy) की गणना:

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\Sigma d^2y - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$$

$$= \frac{18 - \frac{5 \times 5}{5}}{31 - \frac{(5)^2}{5}}$$

$$= \frac{18 - 5}{31 - 5} = \frac{13}{26} = .5$$

$$\boxed{\text{अतः } bxy = +.5}$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक (byx) की गणना:

$$byx = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N}}{\Sigma d^2x - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

$$byx = \frac{18 - \frac{5 \times 5}{5}}{15 - \frac{(5)^2}{5}}$$

$$byx = \frac{18 - 5}{15 - 5} = \frac{13}{10} = 1.3$$

$$\boxed{\text{अतः } byx = +1.3}$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण की गणना:

$(X - \overline{X}) = bxy\ (Y - \overline{Y})$

या $(X - 3) = .5\ (Y - 5)$

या $(X - 3) = 0.5Y - .5 \times 5$

या $X = 3 - 2.5 + .5Y$

या $X = .5 + .5Y$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण की गणना:

$Y - \overline{Y} = byx\ (X - \overline{X})$

या $Y - 5 = 1.3\ (X - 3)$

या $Y - 5 = 1.3\ X - 3.9$

या $Y = 5 + 1.3\ X - 3.9$

या $Y = 1.10 + 1.30\ X$

प्रतीपगमन रेखाओं को खींचने के लिए दोनों प्रतीपगमन समीकरणों को काम में लिया जावेगा। आंकलित मूल्यों की गणना निम्न प्रकार से की जावेगी:

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण:

$X = .5 + .5Y$

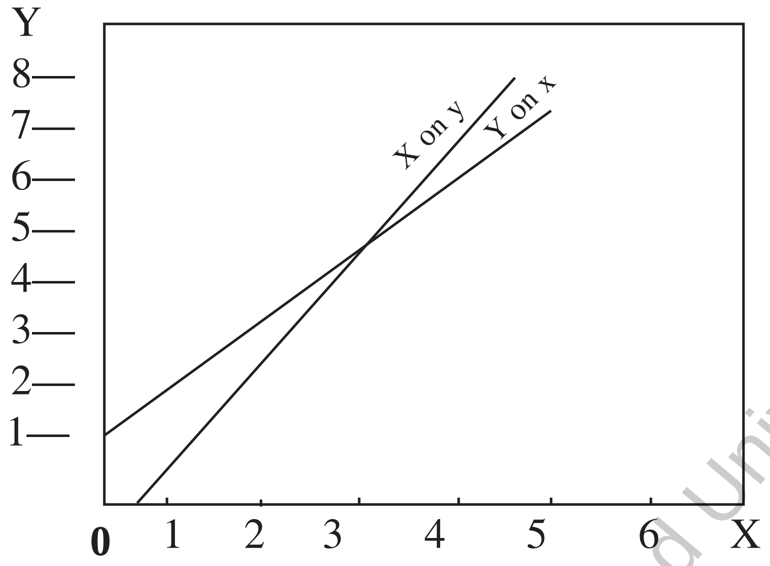
दिया गया Y का मान	**X का आंकलित मान**	
2	.5 + .5 x 2 =	1.5
5	.5 + .5 x 5 =	3.0
3	.5 + .5 x 3 =	2.0
8	.5 + .5 x 8 =	4.5
7	.5 + .5 x 7 =	4.0

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण:

$Y = 1.1 + 1.3X$

दिया गया X का मान	**Y का आंकलित मान**	
1	1.1 + 1.3 x 1 =	2.4
2	1.1 + 1.3 x 2 =	3.7
3	1.1 + 1.3 x 3 =	5.0
4	1.1 + 1.3 x 4 =	6.3
5	1.1 + 1.3 x 5 =	7.6

आंकलित मूल्यों के आधार पर ज्ञात की गयी रेखाओं को प्रतीपगमन रेखाएं कहते हैं। प्रतीपगमन रेखा ज्ञात करने के लिए सबसे पहले स्वतन्त्र चर को '०' मानकर आंकलित मूल्य ज्ञात करते हैं। यह प्रतीपगमन रेखा का प्रारम्भिक बिन्दु कहलाता है। एक अन्य स्वतन्त्र चर के लिए अनुमानित मूल्य ज्ञात कर इसे ग्राफ पर दिखाया जाता है। दोनों बिन्दुओं के आधार पर एक सीधी रेखा खींची जाती है जो प्रतीपगमन रेखा होती है।



Regression Lines

यहां हमने प्रत्येक स्वतंत्र चर के लिए अनुमानित मूल्य का निर्धारण करके चित्र में दिखाया है और इन बिन्दुओं को जोड़कर प्रतीपगमन रेखाएं खींची गयी है।

द्विचर आवृति बंटन में प्रतीपगमन समीकरणों का निर्धारण:

Regression Equations in Bi-variate Grouped Frequency Distribution

द्विचर आवृति बंटन में प्रतीपगमन ज्ञात करने के लिए पूर्व में वर्णित विधि का प्रयोग किया जाता है। अन्तर यह है कि प्रत्येक सम्बन्धित मान स पहले आवृति (f) लगायी जाती है।

इसके लिए सूत्र निम्न प्रकार है–

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण:

$$(X - \bar{X}) = bxy\ (Y - \bar{Y})$$

or $$(X - \bar{X}) = \frac{\Sigma fdxdy - \frac{\Sigma fdx\ .\ \Sigma fdy}{N}}{\Sigma fd^2y - \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}} \times \frac{i_x}{i_y}\ (Y - \bar{Y})$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण:

$$(Y - \bar{Y}) = byx\ (X - \bar{X})$$

$$(Y - \bar{Y}) = \frac{\Sigma fdxdy - \frac{\Sigma fdx\ .\ \Sigma fdy}{N}}{\Sigma fd^2x - \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}} \times \frac{i_y}{i_x}\ (X - \bar{X})$$

उदाहरण (Illustration)–५:

निम्नाकिंत तालिका में विभिन्न ऊँचाई एवं वजन वाले विद्यार्थियों की संख्या दी गयी हैं। सह–संबंध गुणंक एवं दोनों समीकरणों की गणना कीजिए:

ऊँचाई (ईंचों में)	वजन (पौण्ड में)				
	80-90	90-100	100-110	110-120	Total
50-55	2	10	8	-	20
55-60	4	15	5	1	25
60-65	2	10	15	8	35
65-70	2	5	2	11	20
योग	10	40	30	20	100

हल (Solution) :

प्रतीपगमन समीकरणों की गणना

Height in incnes	M.V.	Weight (in kg)	80-90	90-100	100-110	110-120				
		M.V.(Y)	85	95	105	115				
	X	dx \ dy	-1	0	+1	+1	F	Fdx	Fd²x	Fdxdy
50-55	52.5	-2	2 2 4	0 10 0	-2 8 -16	-	20	-40	80	-12
55-60	57.5	-1	1 4 4	0 15 0	-1 5 -5	-2 1 -2	25	-25	25	-3
60-65	62.5	0	0 2 0	0 10 0	0 15 0	0 8 0	35	0	0	0
65-70	67.5	+1	-1 2 -2	0 5 0	1 2 2	2 11 22	20	20	20	22
		F	10	40	30	20	100 N	-45 Σfdx	125 Σfd²x	7 Σfdxdy
		fdy	-10	0	30	40	60 Σfdy			
		fd²y	-10	0	30	80	120 Σfd²y			
		fdxdy	6	0	-19	20	7 Σfdxdy			

नोट: $dx = \frac{X-Ax}{ix} = \frac{(X-62.5)}{5}$

$dy = \frac{Y-Ay}{iy} = \frac{Y-95}{10}$

$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N} \mathbf{X}\ ix$

$\overline{Y} = A + \frac{\Sigma fdy}{N} \mathbf{X}\ iy$

$\overline{X} = 62.5 + \left(\frac{-45}{100} X\ 5\right)$

$\overline{Y} = 95 + \left(\frac{60}{100} X\ 10\right)$

$\overline{X} = 62.5 - 2.25 = 60.25$

$\overline{Y} = 95 + 6 = 101$

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांकः

$$bxy = \frac{\Sigma fdxdy - \frac{(\Sigma fdx\ .\ \Sigma fdy)}{N}}{\Sigma fd^2y\ \frac{(\Sigma fdy)^2}{N}} \times \frac{ix}{iy}$$

$$bxy = \frac{7 - \frac{(-45x60)}{100}}{120 - \frac{(60)^2}{100}} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{7 + 27}{120-36} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{34 \text{ x } 5}{84 \text{ x } 10} = \frac{170}{840} = .202$$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः

$(X - \overline{X}) = bxy\ (Y - \overline{Y})$

या $(X - 60.25) = .202\ (Y - 101)$

या $(X - 60.25) = .202Y - .202 \text{ x } 101$

या $X = 60.25 - 20.402 + .202Y$

या $X = 39.848 + .202Y$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांकः

$$byx = \frac{\Sigma fdxdy - \frac{(\Sigma fdx \,.\, \Sigma fdy)}{N}}{\Sigma fd^2x \;\; \frac{(\Sigma fdx)^2}{N}} \times \frac{iy}{ix}$$

$$byx = \frac{7 - \frac{(-45x60)}{100}}{125 - \frac{(45)^2}{100}} \times \frac{10}{5}$$

$$= \frac{7 + 27}{120\text{-}20.25} \times \frac{10}{5}$$

$$= \frac{34 \text{ x } 10}{104.75 \text{ x } 5} = \frac{340}{523.75} = .649$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरणः

$Y = a + bX$

$(Y - \overline{Y}) = byx \;\; (X - \overline{X})$

$(Y - 101) = .649 \; (X - 60.25)$

$(Y - 101) = .649X - .649 \text{ x } 60.25$

या $Y = 101 - 39.102 + .649X$

या $Y = 61.898 + .649X$

सह–संबंध गुणांक (r) की गणना

$r = \pm\sqrt{bxy \text{ x } byx} = \pm\sqrt{.202 \text{ x } .649} = +\sqrt{.131098} = + .362$

दिये गये समीकरणों से माध्य मूल्यों एवं प्रतीपगमन गुणकों की गणना करना : (Computation of Mean Values and Regression Coefficients from the Given Equations)

(अ) दिये गये समीकरणों से माध्य मूल्यों की गणनाः

X तथा Y के माध्य मूल्यों की गणना करने के लिए दोनों समीकरणों को हल करके X तथा Y का मान ज्ञात किये जाते हैं जो क्रमशः X का माध्य ($\overline{X}$) तथा Y का माध्य ($\overline{Y}$) कहलाते हैं।

(ब) दिये गये समीकरणों से प्रतीपगमन गुणांकों की गणनाः

सबसे पहले दिये गये समीकरणों को प्रतीगमन समीकरण के प्रमाप रूप मे दिखाया जाता है। इसके लिए एक समीकरण को X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर निम्न प्रमाप प्रारूप में दिखाया जाता हैं:

X=a+bY

दूसरे समीकरण को Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर निम्न प्रमाप प्रारूप में दिखाया जाता हैं:

$$Y=a+bX$$

उपर्युक्त दोनों प्रतीपगमन समीकरणों में **b** को प्रतीपगमन गुणक कहा जाता है। प्रतीपगमन गुणकों के आधार पर सह संबंध गुणक **(r)** का मान निम्न सूत्र के आधार पर ज्ञात किया जाता है।

$$r = \pm \sqrt{bxy \times byx}$$

यदि सह–संबंध गुणक का मान अर्थात.........

दोनों प्रतीपगमन गुणकों का गुणनफल यदि १ या १ से कम हो तो मान्यता सही मानी जाती है अन्यथा मान्यता को बदल कर नये प्रतीपगमन गुणक ज्ञात किये जावेंगे। निम्न उदाहरण से इसे समझाया गया है:

उदाहरण (Illustration)–६:

नीचे दो प्रतीपगमन समीकरण दिये हुए है:

$15X - 6Y - 60 = 0$ ----(i)

$8X - 10Y + 70 = 0$ ---- (ii)

Y का प्रसरण $(\sigma_y^2) = 18.0625$

ज्ञात कीजिए: (अ) X तथा Y के माध्य मूल्य

(ब) X तथा Y चरों के मध्य सह –सम्बन्ध

(स) X श्रेणी का प्रमाप विचलन

हल (Solution) :

(अ) X तथा Y के माध्य मूल्यों की गणना:

$15X - 6Y = 60$ ------ (i)

$8X - 10Y = -70$ ------ (ii)

\-   +   +

समीकरण (i) को ५ से तथा (ii) को ३ से गुणा करके आपस में घटाने पर–

$75X - 30Y = 300$ ----- (iii)

$24X - 30Y = -210$ ----- (iv)

$51X = 510$

या $X = \frac{510}{51} = 10$

समीकरण (ii) में X का मान रखने पर–

$8 \times 10 - 10Y = -70$

या $-10Y = -70 - 80 = -150$

$-10Y = -150$

या $Y = \frac{150}{10} = 15$

अतः, $X = 10$ और $Y = 15$

(ब) X तथा Y चरों के मध्य सह –सम्बन्ध गुणांक की गणना:

प्रश्न में सामान्य प्रतीपगमन समीकरण नहीं दिये गये है इसलिए समीकरण (ii) को X का Y पर तथा समीकरण (i) को Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण मानकर अग्र प्रकार से प्रमाप प्रारूप में दिखाया जावेगा:

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः

$8X - 10Y + 70 = 0$

या $8X = -70 + 10Y$

या $X = \frac{-70}{8} + \frac{10}{8} Y$

अतः, $bxy = \frac{10}{8}$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरणः

$15X - 6Y = 60$

या $-6Y = 60 - 15X$

या $Y = \frac{-60}{6} + \frac{15}{6} X$

अतः, $byx = \frac{15}{6}$

$$r = \pm\sqrt{bxy \times byx} = \sqrt{\frac{10}{8} \times \frac{15}{6}} = \sqrt{\frac{25}{8}} > 1$$

चूंकि r का मान एक से अधिक है इसलिए प्रतीपगमन समीकरणों के संबंध में मान्यताएं गलत है। इसके लिए नयी मान्यता के अनुसार समीकरण (ii) को Y का X पर तथा दूसरे समीकरण (i)को X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण माना गया है। नयी मान्यता के अनुसार प्रतीपगमन समीकरणों का प्रमाप प्रारूप निम्न प्रकार से होगाः

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः

$15X - 6Y - 60 = 0$

या $15X = 60 + 6Y$

या $X = \frac{60}{15} + \frac{6}{15} Y$

या $X = 4 + \frac{2}{5} Y$

अतः, $bxy = \frac{2}{5} = 0.40$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरणः

$8X - 10Y + 70 = 0$

या $-10Y = -70 - 8X$

या $Y = \frac{70}{10} + \frac{8X}{10}$

or, $Y = 7 + \frac{4}{5} X$

अतः, $bxy = \frac{4}{5} = 0.80$

$$r = \pm\sqrt{bxy \times byx} = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{8}{25}} = \sqrt{.32} = .565$$

चूंकि r का मान ± 1 से अधिक नहीं है इसलिए हमारी नयी मान्यता सही है।

अतः सह–संबंध गुणंक $(r) = + 0.565$

(स) X श्रेणी का प्रमाप विचलन (σ_x) की गणनाः

दिया हुआ है

(i) Y श्रेणी का प्रसरण $(\sigma_y^2) = 18.0625$

अतः $\sigma y = \sqrt{18.0625}$

या $\sigma y = 4.25$

(ii) X का Y पर प्रतीपगमन गुणंक $(bxy) = \frac{2}{5} = 0.40$

(iii) $r = +0.565$

$$bxy = r \times \frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$0.40 = .565 \times \frac{\sigma x}{4.25}$$

या $$\frac{0.40 \times 4.25}{.565} = \sigma x$$

या $$\sigma x = 3$$

अतः, $\overline{X} = 10$, $\overline{Y} = 15$, $r = + 0.565$ तथा $\sigma x = 3$ Ans.

प्रतीपगमन समीकरणों की गणना हेतु न्यूनतम वर्ग विधिः

Least Square Method for Computation of Regression Equations

आश्रित चरों की गणना करने के लिए निम्नांकित समीकरणों को काम में लिया जाता है:

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः

$X = a + bY$

Y का Xपर प्रतीपगमन समीकरणः

$Y = a + bX$

उपयुर्क्त समीकरणों में प्राचलों 'a' तथा 'b' का मान स्थिर है। न्यूनतम वर्ग विधि के अन्तर्गत विकसित निम्नांकित समीकरणों को हल करके 'a' तथा 'b' का मान ज्ञात किया जा सकता है:

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरणः	**Y का X पर प्रतीपगमन समीकरणः**
$X = a + bY$ $\Sigma X = Na + b\Sigma Y$ --- (i) $\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$ ---(ii	$Y = a + bX$ $\Sigma Y = Na + b\Sigma X$ --- (i) $\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$ --- (ii)

जहां किः

ΣY = Y के दिये गये मूल्यों का योग

ΣX = X के दिये गये मूल्यों का योग

ΣX^2 = X के दिये गये मूल्यों के वर्गों का योग

ΣY^2 = Y के दिये गये मूल्यों के वर्गों का योग

ΣXY = X तथा Y चरों के गुणनफलों का योग

N = X तथा Y के युग्म चरों की संख्या

उपयुर्क्त दोनों समीकरणों के हल द्वारा स्थिर प्राचल 'a' तथा 'b' का मान ज्ञात किया जाता है। इसके पश्चात् दोनों आधारभूत प्रतीपगमन समीकरणों की सहायता से X तथा Y के दिये गये मूल्यों से सम्बन्धित प्रत्याशित मूल्यों का निर्धारण किया जा सकता है।

उदाहरण (Illustration)–७:

न्यूनतम वर्ग विधि को काम में लेते हुए दोनों प्रतीपगमन समीकरणों की गणना कीजिएं:

X :	1	3	4	6	8	9	11	14
Y :	1	2	4	4	5	7	8	9

हल (Solution) :

न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रतीपगमन समीकरणों की गणना

x	x^2	Y	Y^2	XY
1	1	1	1	1
3	9	2	4	6
4	16	4	16	16
6	36	4	16	24
8	64	5	25	4
9	81	7	49	63
11	121	8	64	88
14	196	9	81	126
$\Sigma x = 56$	$\Sigma x^2 = 524$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma y^2 = 256$	$\Sigma XY = 364$

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण: $Xc = a + bY$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण: $Yc = a + bX$

यहाँ 'a' तथा 'b' स्थिरांक है जिनकी गणना निम्नांकित दो सामन्य समीकरणों को हल करके की जावेगी–

X का Y पर सामान्य समीकरण:

$\Sigma X = Na + b\Sigma Y$ _____(i)

$\Sigma XY = a\Sigma Y + b\Sigma Y^2$ _____(ii)

मान रखने पर

$56 = 8a + 40b$ (i)

$364 = 40a + 256b$ (ii)

समीकरण (i) को 5 से गुणा करके इसमें से समीकरण (ii) को घटाने पर

$280 = 40a + 200b$ .... (iii)

$364 = 40a + 256b$ .... (ii)

$-\quad -\quad -$

$-84 = -56b$

या $b = \dfrac{84}{56} = 1.5$

Y का X पर सामान्य समीकरण:

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$ _____(i)

$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$ _____(ii)

मान रखने पर

$40 = 8a + 56b$ (i)

$364 = 56a + 524b$ (ii)

समीकरण (i) को 7 से गुणा करके इसमें से समीकरण (ii) को घटाने पर

$280 = 56a + 392b$ .... (iii)

$364 = 56a + 524b$ .... (ii)

$-\quad -\quad -$

$-84 = -132b$

या $b = \dfrac{84}{132} = .636$ या 0.64

समीकरणों (i) में b का मान रखने पर

$56 = 8a + 40 \times 1.5$

या $56 = 8a + 60$

या $-8a = 60 - 56$

या $a = \frac{4}{-8} = -0.5$

अत: X का Y प्रतीपगमन समीकरण:

$X = a + bY$

$X = -0.5 + 1.5Y$

समीकरणों (i) में b का मान रखने पर

$40 = 8a + 56 \times 0.64$

या $40 = 8a + 35.84$

या $-8a = 35.84 - 40$

या $a = \frac{4.16}{8} = 0.52$

अत: Y का X प्रतीपगमन समीकरण:

$Y = a + bX$

$Y = 0.52 + 0.64X$

अनुमान की प्रमाप त्रुटि (Standard Error of Estimate)

प्रतीपगमन विधि से आश्रित चर का लगाया गया अनुमान वास्तविकता के कितना निकट है, को जानने के लिए प्रमाप-विभ्रम की गणना की जाती है। अनुमान की प्रमाप विभ्रम आश्रित चर के वास्तविक मूल्यों तथा संगणित मूल्यों के विचलनों के औसत का माप है।

दोनों प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप विभ्रम की गणना प्रश्न में दी गयी सूचनाओं के आधार पर निम्नांकित दो सूत्रों में से किसी भी एक सूत्र द्वारा की जा सकती है:-

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण के लिए अनुमान की प्रमाप त्रुटि

i) $Sxy = \sqrt{\frac{\Sigma(X - Xc)2}{N}}$

अथवा

ii) $Sxy = \sigma x\sqrt{1 - r^2}$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण के लिए अनुमान की प्रमाप त्रुटि

$Syx = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Yc)^2}{N}}$

अथवा

$Syx = \sigma y\sqrt{1 - r^2}$

Where, Sxy = X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण के लिए अनुमान की प्रमाप त्रुटि

Syx = Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण के लिए अनुमान की प्रमाप त्रुटि

Xc = X श्रेणी के आंकलित मूल्य

Yc = Y श्रेणी के आंकलित मूल्य

नोट:- जब आश्रित चर के आंकलित मूल्य दिये हुए हों तो प्रथम सूत्र प्रयुक्त किया जाता है। यदि सह-संबंध गुणक एवं प्रमाप विचलन ज्ञात हो तो द्वितीय सूत्र प्रयुक्त होता है।

उदाहरण **Illustration 8 :**

निम्नांकित समंको से अनुमान की दोनों प्रमाप विभ्रमों की गणना कीजिए:-

X	6	2	10	4	8
Y	9	11	5	8	7

हल **Solution :** प्रश्न में आश्रित चर के आंकलित मूल्यों Yc तथा Xc दिये हुए नहीं है। इसलिए इनकी गणना निम्न प्रकार की गयी है।

X	Y	(X-6) dx	dx^2	(Y-8) dy	dy^2	dxdy	Xc = a+bY = 16.4+1.3Y	Yc = -11.3–0.65X
6 2 10 4 8	9 11 5 8 7	0 -4 +4 -2 +2	0 16 16 4 4	+1 +3 -3 0 -1	1 9 9 0 1	0 -12 -12 0 -2	4.70 2.10 9.90 6.00 7.30	8.00 10.60 5.40 9.30 6.70
ΣX=30 $\overline{X}$=30/5 = 6	ΣY=40 $\overline{Y}$=40/5 = 8	=0 Σdx	40 Σd^2x	0 Σdy	20 Σd^2y	-26 Σdxdy	30.00 ΣXc	40.00 ΣYc

X का **Y** पर प्रतीपगमन गुणांक **(bxy)**

$$bxy = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2y} = \frac{-26}{20} = -1.30$$

Y का **X** पर प्रतीपगमन गुणांक **(byx)**

$$byx = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma d^2x} = \frac{-26}{40} = -0.65$$

प्रतीपगमन समीकरण **X** का **Y** में **Y** का मान तथा समीकरण **Y** का **X** में **X** का मान रखकर **X** तथा **Y** के आंकलित मान **Xc** तथा **Yc** ज्ञात किये जाते है।

अनुमान की प्रमाप त्रुटि की गणना

X	Y	Yc	Xc	$(Y - Yc)^2$	$(X - Xc)^2$
6	9	8.0	4.7	1.00	1.69
2	11	10.6	2.1	0.16	0.01
10	5	5.4	9.9	0.16	0.01
4	8	9.3	6.0	1.69	4.00
8	7	6.7	7.3	0.09	0.49
ΣX = 30	ΣY = 40	ΣYc = 40	ΣXc – 30	$\Sigma(Y - Yc)^2 = 3.1$	$\Sigma(X - Xc)^2 = 6.20$

X का **Y** पर प्रतीपगमन समीकरण

$X = a + bY$

या $X - \overline{X} = bxy\,(Y - \overline{Y})$

या $(X - 6) = -1.30\,(Y - 8)$

या $X - 6 = -1.30Y + 10.4$

या $X = 16.4 - 1.30Y$

Y का **X** पर प्रतीपगमन समीकरण

$Y = a + bX$

या $(Y - \overline{Y}) = byx\,(X - \overline{X})$

या $(Y - 8) = -0.65\,(X - 6)$

या $Y - 8 = -0.65X + 3.9$

या $Y = 11.9 - 0.65X$

X की **Y** पर अनुमान की प्रमाप त्रुटि **(Sxy)=** $\sqrt{\frac{\Sigma(X - Xc)^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{6.20}{5}} = \sqrt{1.24}$$

$$= 1.1136$$

Y की **X** पर अनुमान की प्रमाप त्रुटि **(Syx)=** $\sqrt{\frac{\Sigma(Y - Yc)^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{3.1}{5}}$$

$$= 7.87$$

प्रतीपगमन विश्लेषण की उपयोगिताः-
(Utility of Regression Analysis:)

वर्तमान युग में प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाता है। जिनमें दो या अधिक संबंधित श्रेणियों में विभिन्न चरों की सामान्य माध्य की ओर वापस जाने की प्रवृत्ति पायी जाती है। आर्थिक एवं व्यावसायिक जगत में प्रतीपगमन की बहुत अधिक उपयोगिता है। इसका प्रयोग प्रबन्धकों द्वारा यह अनुमान लगाने के लिए किया जाता है कि किसी वस्तु के उत्पादन या उसकी पूर्ति में निश्चित मात्रा में वृद्धि या कमी होने पर उसके मूल्य में क्या संभावित परिवर्तन होगा ? मूल्यें के आधार पर मांग का, वर्षा की मात्रा, खाद, बीज आदि के आधार पर कृषि उत्पादन का अनुमान लगाने में भी प्रतीपगमन विश्लेषण तकनीक काम में ली जाती है।

प्रतीपगमन विश्लेषण के द्वारा मांग वक्र, आपूर्ति वक्र आदि का निर्माण किया जा सकता है।

अभ्यासार्थ प्रश्न
(SELF EXAMINATION QUESTIONS)

(अ) वस्तुनिष्ठ उत्तर वाले प्रश्नः-

प्रत्येक प्रश्न का सही उत्तर लिखिएः-

1- यदि दो चर X तथा Y हो तब प्रतीपगमन समीकरण हो सकते हैं-

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) कोई भी संख्या ( )

2- प्रतीपगमन समीकरणों की गणना करने के लिए विधि अपनायी जाती है-

(a) गुणनफल विधि (b) संगामी विचलन विधि

(c) सामान्य समीकरण विधि (d) न्यूनतम वर्ग विधि

3- दोनो प्रतीपगमन रेखाएं एक ही बन जाती है, जब-

(a) r = 0 (b) r = +1 (c) r = -1(d) b or c ( )

4- दोनों प्रतीपगमन गुणकों की सीमाएं हैं-

(a) कोई सीमा नहीं (b) धनात्मक होनी चाहिए

(c) एक धनात्मक तथा दूसरी ऋणत्मक (d) दोनों प्रतीपगमन गुणकों के गुणनफलों का मान संख्या में एक से अधिक नहीं होना चाहिए।

5- प्रतीपगमन रेखा Y का X पर ढाल होता है।
(a) bxy (b) byx (c) दोनों (d) कोई भी नहीं ( )

6- प्रतीपगमन रेखा Y का X पर ढाल होता है।
(a) bxy (b) byx (c) दोनों (d) कोई भी नहीं ( )

7- यदि दोनों प्रतीगमन गुणक ऋणात्मक हो, तब सह-संबंध गुणक (r) होगा।
(a) ऋणात्मक (b) घनात्मक (c) शून्य (d) कुछ भी नहीं ( )

8- सह-सम्बन्ध गुणक दोनों प्रतीपगमन गुणकों का......................होता है।
(a) गुणोत्तर माध्य (b) समान्तर माध्य (c) हरात्मक माध्य (d) कुछ भी नहीं ( )

9- जब r =0 हो तो प्रतीपगमन गुणक होंगे।
(a) 1 (b) o (c) –1 (d) कुछ भी नहीं ( )

10- समीकरण 2x + 3y + 50 = 0, के लिए Y का X पर प्रतीपगमन गुणक (byx) का मान होगा-
(a) 2/3 (b) –3/2 (c) –2/3 (d) कुछ भी नहीं ( )

उत्तर [1(b), 2(d), 3(d), 4(d), 5(b), 6(a), 7(a), 8(a), 9(b), 10(c).]

(ब) लघूत्तरात्मक प्रश्नः- अधिकतम शब्द सीमा ५०ः

1. प्रतीपगमन क्या है ?
2. प्रतीपगमन विश्लेषा के दो उद्देश्य लिखिए।
3. सरल-रेखीय प्रतीपगमन के दो समीकरण लिखिए।
4. प्रतीपगमन रेखा से आपका क्या अभिप्राय है ?
5. प्रतीपगमन में अनुमान की प्रमाप विभ्रम से आपका क्या अभिप्राया है ?
6. अनुमान की प्रमाप विभ्रम की गणना किस प्रकार की जाती है ?
7. निम्नांकित समंक दिये हुए हैं:-

   $X = 36, \quad Y \; 85, \quad \sigma x = 11, \sigma y = 8$ and $r = 0.67$

   दोनों प्रतीपगमन गुणकों की गणना कीजिए। [Ans: bxy = 0.92125, byx = 0.487]

(स) निबन्धात्मक प्रश्नः-

1. प्रतीपगमन अवधारणा की व्याख्या कीजिए तथा इसकी उपयोगिता की विवेचना कीजिए।
2. प्रतीपगमन विश्लेषण पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
3. अनुमान की प्रमाप विभ्रम को स्पष्ट कीजिए।

(द) **संख्यात्मक प्रश्नः-**

1. विज्ञापन पर व्यय तथा विक्रय राशि के संबंध में निम्नलिखित सूचनाएं उपलब्ध हैं:-
The following information about advertisement expenses and amount of sales are available :

	Advertisement exp. (X) (Rs. crores)	Sales (Y) (Rs. corores)
माध्य	20	120
प्रमाप विचलन	5	25

सह-संबंध गुणक = 0.8

दोनों प्रतीपगमन समीकरणों की रचना कीजिए:-

उत्तर $\left[\begin{array}{lll} \mathbf{X} & = & \mathbf{0.8 + 0.16Y} \\ \mathbf{Y} & = & \mathbf{40 + 4X} \end{array}\right]$

2. निम्नलिखित सूचना के आधार पर मुम्बई में संभावित मूल्य की गणना कीजिए यदि कोलकाता में मूल्य ७० रू. हो -
Find the most probable price in Mumbai corresponding to the price of Rs. 70 at Kolkata from the following information :

	मुम्बई	कोलकाता
Mean price	Rs. 67	Rs. 65
Standard deviation	3.5	2.5

Coefficient of correlation + 0.8

[उत्तर X = 1.12Y - 5.80; X_{70} = Rs. 72.6]

3. निम्नलिखित समंको से दोनों प्रतीपगमन समीकरणों की गणना कीजिए तथा X= 13 के लिए Y का सम्भावित मूल्य एवं Y = 15 के लिए X का सम्भावित मूल्य भी ज्ञात कीजिए :-
Find the two regression equations from the following data :

X	:	2	4	5	5	8	10
Y	;	6	7	9	10	12	12

Estimate the probable value of Y when X = 13 and also estimate the probable value of X when Y = 15

[Ans. Y_{13} = 15.3063 and X_{15} = 11.75]

4. निम्नलिखित सूचना से दोनों प्रतीपगमन समीकरणों की रचना कीजिए:-
From the following information calculate both the regression equations :
$\Sigma X = 15,\ \Sigma Y = 25,\ \Sigma X^2 = 55,\ \Sigma Y^2 = 151,\ \Sigma XY = 88,\ N = 5$

उत्तर $\left[\begin{array}{l} X = 0.5 + 0.5Y \\ Y = 1.1 + 1.3X \end{array}\right]$

5. एक आंशिक रूप से नष्ट हुई प्रयोगशाला में सह–संबंधित आंकड़ों के विश्लेषण से निम्नाकिंत परिणाम उपलब्ध हुए :–

In a partially destroyed laboratory-record of an analysis of correlation data the following results only were available:

X श्रेणी का प्रसरण = 9

प्रतीपगमन समीकरण : $8X - 10Y + 66 = 0$

$40X - 18Y = 214$

Find out the following values from the above information :

(i) Mean values of X and Y; (ii) Coefficient of correlation between X & Y; and (iii) Standard deviation of Y.

उपर्युंक्त सूचना से निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए:–

(i) X तथा Yका औसत मान (ii) X तथा Y के मध्य सह–संबंध गुणक तथा ;

(iii) Y प्रमाप विचलन (σ y)

[उत्तर :- $\bar{X} = 13$ and $\bar{Y} = 17$, bxy = 0.45, byx = 0.80, r = +0.60, σ y = 4]

6. निम्न आंकड़ों से दोनों प्रतीगमन गुणकों की गणना कीजिए तथा उस विद्यार्थी के सांख्यिकी में प्राप्तांक का अनुमान लगाइए यदि अर्थशास्त्र में उसने २० अंक प्राप्त किये हो:–

From the following data, find the two regression lines and also estimate the marks in statistics of a student who secured 20 marks in economics:

Marks in Economics (Y)	Marks in Statistics (X)			Total
	20-25	25 -30	30-35	
16-20	9	14	-	23
20-24	6	11	3	20
24-28	-	-	7	7
Total	15	25	10	50

[उत्तर :- X = 12.1 + 0.72Y, and Y = 8.01 + 0.47X, X_{20} = 26.50]

7. निम्न समंकों से अनुमान की प्रमाप त्रुटि की गणना कीजिए:–

From the following data calculate standard error of estimate:

X	:	3	4	5	6	7
Y	:	6	9	7	8	10

[उत्तर:- Sxy = 1.01, Syx = 1.01]

Section- D
Chapter- 1
सूचकांक
(Index Numbers)

१. अवधारणा
२. सूचकांकों का अर्थ
३. सूचकांकों के प्रकार
४. सूचकांकों की विशेषताएं
५. सूचकांकों की उपयोगिता
६. सूचकांकों के निर्माण में ध्यान देने योग्य बातें
७. संकेताक्षर
८. एक मद के लिए मूल्य सूचकांक ज्ञात करने की विधियां
९. श्रृंखला सूचकांक
१०. मदों के समूह के लिए सूचकांकों का निर्माण
११. मूल्यानुपातों की सामान्य औसत विधि से सूचकांको का निर्माण
१२. मदों के समूह के लिए श्रृंखला आधार सूचकांको का निर्माण
१३. भारित सूचकांकों का निर्माण
१४. पारिवारिक बजट विधि
१५. भारित समूहन विधि
१६. अन्य भारित विधियां
१७. सूत्रों की पर्याप्तता का परीक्षण या उत्क्राम्यता परीक्षण
१८. आधार परिवर्तन
१९. स्थिर आधार सूचकांकों को श्रृंखला आधार सूचकांकों में बदलना
२०. श्रृंखला आधार सूचकांकों को स्थिर आधार सूचकांकों में बदलना
२१. आधार वर्ष परिवर्तन
२२. शिरोबंधन
२३. सूचकांकों की अपस्फीति
२४. अभ्यासार्थ प्रश्न

Section- D
Chapter- 1
सूचकांक
(Index Numbers)

अवधारणा (Concept)

सूचकांक सापेक्ष परिवर्तन मापने की सुविधाजनक विधि है इसके द्वारा दो समयावधियों में या दो स्थानों पर विभिन्न चरों में हुए परिवर्तनों को मापा जा सकता है। एक समयावधि में मूल्यों या मात्राओं में हुए सापेक्ष परिवर्तनों के विशेष माध्य को ही सूचकांक कहा जाता है। यह एक औसत होता है जिसे प्रतिशत रूप में व्यक्त किया जाता है। सूचकांक ज्ञात करने के लिए दो या दो से अधिक समयावधियों से सम्बन्धित समंकों की आवश्यकता होती है जिनमें से एक समयावधि को 'आधार समयावधि' या आधार वर्ष (Base Year) माना जाता है। आधार वर्ष तुलना के लिए एक प्रमाप बिन्दु का कार्य करता है। आधार वर्ष की तुलना में प्रचलित वर्ष के मूल्यों या मात्राओं में होने वाले प्रतिशत औसत परिवर्तनों को ही सूचकांक कहा जाता है। जैसे– एक वस्तु के वर्ष २००५ के मूल्यों के आधार पर वर्ष २००९ का मूल्य सूचकांक १८० हो तो इसका तात्पर्य यह है कि वस्तु के मूल्यों में वर्ष २००५ की तुलना में ८०% की वृद्धि हुई है।

सूचकांकों का अर्थ (Meaning of index numbers)

सूचकांक एक विशेष प्रकार का सांख्यिकीय माध्य है जो समय, भौगोलिक स्थिति अथवा अन्य विशेषताओं के आधार पर किसी चर मूल्य अथवा सम्बन्धित चर मूल्यों के समूह में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है। यह मूल्यों (Prices) अथवा मात्राओं (Quantities) में होने वाले परिवर्तनों का सापेक्ष मापन करता है।

सूचकांकों की विशेषताएं (Characteristics of index numbers)

सूचकांकों की निम्नलिखित विशेषताएं हैं:

१. सूचकांक विशेष प्रकार के माध्य होते हैं जिसमें विभिन्न मापन इकाइयों में व्यक्त समंकों का माध्य लिया जाता है जबकि साधारण माध्य में सभी समंक एक ही मापन इकाई में व्यक्त किए हुए होते है।

२. सूचकांक दो समयावधियों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों को प्रदर्शित करते हैं।

३. सूचकांक प्रतिशत में ज्ञात किये जाते हैं।

४. सूचकांक तुलना के लिए अच्छा आधार प्रदान करते हैं।

सूचकांकों के प्रकार (Types of index numbers)

सूचकांक मुख्य रूप से तीन प्रकार के होते हैं:

(i) कीमत सूचकांक (Price Index)
(ii) मात्रा सूचकांक (Quantity Index)
(iii) कुल मूल्य सूचकांक (Value Index)

उपर्युक्त के अलावा किसी विशेष उद्देश्य के लिए भी सूचकांक बनाये जा सकते हैं जिन्हें 'विशेष उद्देश्य सूचकांक' (Special Purpose Index) कहा जाता है।

(i) कीमत सूचकांक (Price Index):

दो समयान्तरों या स्थानों के मध्य कीमतों के सापेक्ष परिवर्तनों के औसत को कीमत सूचकांक कहा जाता है। इन्हें मूल्य सूचकांक के नाम से भी जाना जाता है। सामान्यतया सूचकों से तात्पर्य मूल्य सूचकांकों से ही लिया जाता है।

(ii) मात्रा सूचकांक (Quantity Index):

किसी वस्तु की दो समयान्तरों में उत्पादन, विक्रय या उपयोग की मात्रा में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों के औसत को मात्रा सूचकांक कहा जाता है।

(iii) कुल मूल्य सूचकांक (Value Index):

किसी वस्तु के कुल मूल्य (कीमत X मात्रा) में दो समयावधियों में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों के औसत को कुल मूल्य सूचकांक या अर्ध सूचकांक कहा जाता है।

सूचकांकों की उपयोगिता (Utility of Index Numbers)

आर्थिक एवं सामाजिक समस्याओं के विश्लेषण के लिए सूचकांक महत्वपूर्ण साधन है। आर्थिक जगत में सूचकांकों को आर्थिक वायु मापक यंत्र की संज्ञा दी जाती है। जिस प्रकार मौसम का पूर्वानुमान वायुमापक यंत्र की सहायता से हवा का दबाब मालूम करके किया जा सकता है, ठीक उसी प्रकार आर्थिक गतिविधियों का पूर्वानुमान सूचकांकों की सहायता से परिवर्तन की दिशा का अध्ययन करके किया जा सकता है। सूचकांक की प्रमुख उपयोगिता निम्न प्रकार हैं:

(i) सूचकांकों की सहायता से मुद्रा की वास्तविक क्रय शक्ति को निर्धारित किया जा सकता है।

(ii) सूचकांक प्रशासनिक नीतियों को निर्धारित करने मे दिशा निर्देश प्रदान करते हैं। जैसे– कर्मचारियों को देय महंगाई भत्तें का निर्धारण कीमत सूचकांकों के आधार पर किया जाता है।

(iii) सूचकांकों की सहायता से समंकों की तुलना की जा सकती है।

(iv) एक समयावधि में प्रवृत्ति के अध्ययन में सूचकांक सहायक होते है।

(v) सूचकांक मुद्रा–स्फीति या मुद्रा अपस्फीति की आर्थिक दशा के सूचक होते है।

सूचकांकों के निर्माण में ध्यान देने योग्य बातें
(Issues involved in construction of index numbers)

सूचकांक निर्माण करते समय निम्नांकित बातों को ध्यान में रखना चाहिए:–

(i) सूचकांकों का उद्देश्य

(ii) मदों या वस्तुओं का चुनाव

(iii) आधार वर्ष का चुनाव

(iv) उचित भारों का चुनाव

(v) प्रतिनिधि मूल्यों का चुनाव

(vi) उचित माध्य का चुनाव

(i) <u>सूचकांकों का उद्देश्य</u> (Purpose of index numbers):

सूचकांक बनाने से पूर्व इसके निर्माण का उद्देश्य अच्छी तरह स्पष्ट कर लेना चाहिए क्योंकि सूचकांक के निर्माण सम्बंधी सभी प्रक्रियाएं इनके उद्देश्य पर ही निर्भर करती है। जैसे– उपभोक्ता मूल्य सूचकांक बनाते समय उपभोक्ता वस्तुओं का ही चुनाव करना चाहिए न कि पूंजीगत सामान अथवा कच्चा माल।

(ii) मदों या वस्तुओं का चुनाव (Selection of items):

सूचकांक ज्ञात करने के लिए प्रतिनिधि मदों का ही चुनाव किया जाना चाहिए। प्रतिनिधि वस्तुओं के चुनाव के सम्बंध में निम्न दो प्रश्न महत्वपूर्ण होते हैं–

(i) सूचकांक में कौन–कौन सी वस्तुओं को सम्मिलित किया जाए ?

(ii) चुनी हुई वस्तुओं का प्रकार क्या हो तथा उनमें कौन–कौन से गुण होने चाहिए ?

(iii) आधार वर्ष का चुनाव (Selection of the base Year):

सूचकांक निर्माण के लिए एक आधार अथवा संदर्भ अवधि का होना आवश्यक है जिसके आधार पर सापेक्ष परिवर्तन ज्ञात किए जाते हैं। यह संदर्भ अवधि ही आधार वर्ष कहलाती है। अत: वह संदर्भ अवधि जिसके आधार पर सापेक्ष परिवर्तन ज्ञात किए जाते हैं, आधार वर्ष या आधार अवधि कहलाती है। आधार वर्ष बहुत अधिक पुराना नहीं होना चाहिए। यह सामान्य एवं स्थायित्व वाला होना चाहिए। किसी भी अध्ययन में आधार निश्चित करने की निम्न दो विधियां प्रयोग में ली जा सकती हैं–

(अ) स्थिर आधार विधि (Fixed Base Method)

(ब) श्रृंखला आधार विधि (Chain Base Method)

(iv) उचित भारों का चुनाव (Selection of proper weights):

विभिन्न वस्तुओं का अलग–अलग महत्व होता है इसलिए सूचकांक निर्माण करने के लिए प्रत्येक मद को सापेक्ष महत्व देना आवश्यक है। प्रत्येक मद के सापेक्ष महत्व को भार (Weight) कहा जाता है। भार दो प्रकार के होते हैं–

(अ) प्रत्यक्ष भार (Explicit Weights)

(ब) परोक्ष भार (Implicit Weights)

(अ) प्रत्यक्ष भार (Explicit Weights):

प्रत्यक्ष भारों से आशय उन भारों से लिया जाता है जो वस्तु की कीमत, मात्रा या उनके कुल मूल्य के अनुपात में प्रत्यक्ष रूप से लिए जाते हैं। कीमत सूचकांकों के लिए मात्रा को भार के रूप में लिया जा सकता है तथा मात्रा सूचकांकों के लिए कीमत को भार के रूप में लिया जा सकता है। कुल मूल्य (कीमत X मात्रा) को भी प्रत्यक्ष भार के रूप में लिया जा सकता है।

(ब) परोक्ष भार (Implicit Weights);

जब किसी विशेष वस्तुको अधिक महत्व देने के लिए सूचकांक बनाते समय उसकी अनेक किस्मों को सम्मिलित कर लिया जावे तो वह अप्रत्यक्ष भारांकन विधि कहलाती है। जैसे– सूचकांक बनाते समय गेहूं को नमक की तुलना में आठ गुना महत्व देना हो तो नमक की एक किस्म तथा गेहूं की ८ किस्मों को सूचकांक निर्माण करने के लिए शामिल करना चाहिए। व्यवहार में अप्रत्यक्ष भारों का प्रयोग कम किया जाता हैं।

(v) मूल्य उद्धरण (Price Quotations):

वस्तुओं के मूल्य एक स्थान से दूसरे स्थान पर तथा एक दुकान से दूसरी दूकान पर अलग–अलग होते हैं। सूचकांकों के निर्माण में कौनसे मूल्य लिये जायें तथा कहां से लिए जावें ? इन प्रश्नों के उत्तर के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखा जाना चाहिए:

(अ) विशेष वस्तु के लिए जो बाजार सबसे अधिक प्रसिद्व हो, उसका चुनाव करना चाहिए।

(ब) सूचकांकों के निर्माण में फुटकर अथवा थोक मूल्यों का प्रयोग किया जा सकता है। थोक मूल्यों में स्थिरता अधिक होती है इसलिए यह सर्वोपयुक्त मूल्य माने जाते है। परन्तु इनको तभी लेना चाहिए जबकि यह वस्तुओं के प्रतिनिधि मूल्य हों। जैसे– जीवन निर्वाह सूचकांक ज्ञात करने के लिए फुटकर मूल्य ही प्रतिनिधि मूल्य होते हैं, थोक मूल्य नहीं। इसलिए जीवन निर्वाह सूचकांकों का निर्माण फुटकर मूल्यों के आधार पर किया जाता है।

(स) जो व्यक्ति या संस्था कीमतों का उद्धरण कर रही हों, भेदभाव रहित एवं निष्पक्ष होनी चाहिए।

(द) वस्तुओं को मुद्रा मूल्य में व्यक्त किया जाना चाहिए जैसे- दूध का भाव २५ रूपये प्रति लिटर। यदि वस्तुओं के परिमाण मूल्य दिये हुए हों तो उन्हें सूचकांक बनाते समय मुद्रा मूल्य में बदलना चाहिए। जैसे- नमक का भाव एक रूपये का दो किलो ग्राम दिया हुआ है। यह परिमाण मूल्य है। सूचकांक बनाते समय नमक का भाव प्रति किलो ग्राम या प्रति क्विटल लेना चाहिए।

(vi) उचित माध्य का चुनाव (Selection of Average):

सूचकांक एक विशेष प्रकार का माध्य होता है जो एक सन्दर्भ अवधि की तुलना में हुए सापेक्ष परिवर्तनों का औसत होता है। सैद्वान्तिक रूप से समान्तर माध्य, मध्यका, गुणोत्तर माध्य आदि में से किसी भी माध्य का प्रयोग किया जा सकता है परन्तु व्यवहार में निम्न कारणों से समान्तर माध्य या गुणोत्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है:

(i) मध्यका यद्यपि गणना करने में सरल होती है तथा चरम मूल्यों से भी अधिक प्रभावित नहीं होती है तथापि इससे केवल निरपेक्ष परिवर्तनों को ही मापा जा सकता है। अत: व्यवहार में सापेक्ष माप के औसत के लिए इसका प्रयोग कम किया जाता है।

(ii) बहुलक की गणना चूंकि व्यक्तिगत श्रेणी में संभव नहीं होती है इसलिए इसका भी व्यवहार में प्रयोग नहीं किया जाता है।

(iii) समान्तर माध्य जो कि अति-सीमान्त मदों से बहुत अधिक प्रभावित होता है एक निरपेक्ष माप होता है तथा उत्क्राम्य (Reversible) भी नहीं होता है। अत: सूचकांकों के निर्माण में समान्तर माध्य का प्रयोग भी उचित नहीं है परन्तु इसकी गणना अत्यन्त सरल एवं लोकप्रिय होने के कारण सूचकांकों की रचना में इसका प्रयोग कर लिया जाता है।

(iv) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) अपनी निम्न विशेषताओं के कारण सूचकांकों की रचना हेतु सर्वश्रेष्ठ माध्य माना गया है:

(अ) यह कम मूल्यों को अधिक एवं अधिक मूल्यों को कम महत्व देकर संतुलित वस्तुस्थिति प्रकट करता है।

(ब) इसके आधार पर ज्ञात सूचकांक में उत्क्राम्यता (Reversibility) का गुण होता है जो कि एक अच्छे सूचकांक में होना अनिवार्य है।

(स) गुणोत्तर माध्य से गणना किये गये सुचकांकों में आधार वर्ष परिवर्तन एवं वस्तुओं (Commodity) का परिवर्तन करना सरल होता है।

संकेताक्षर (Notations):

सूचकांकों के निर्माण में प्रयुक्त होने वाले विभिन्न सूत्रों के लिए कुछ संकेताक्षरों को काम में लिया जाता है, जिनका वर्णन निम्न प्रकार से है:

(i) आधार वर्ष (Base Year):

जिस वर्ष के समंकों के आधार पर तुलना की जानी हो, उस वर्ष को आधार वर्ष कहा जाता है। आधार वर्ष की सूचना को प्रदर्शित करने के लिए शून्य (०) का प्रयोग किया जाता है। जैसे- किसी वस्तु की आधार वर्ष में कीमत को (Po) से तथा मात्रा को (Qo) से प्रदर्शित किया जाता है।

(ii) चालू वर्ष (Current Year):

जिस वर्ष के लिए सूचकांक ज्ञात किया जावे, उस वर्ष के समंकों को चालू वर्ष के समंक कहा जाता है। जैसे- किसी वस्तु की चालू वर्ष (1) की कीमत को (P_1) से, चालू वर्ष (2) की कीमत को (P_2) से तथा चालू वर्ष (3) की कीमत को (P_3) से प्रदर्शित किया जाता हैं। इसी प्रकार से किसी वस्तु की चालू वर्ष (1) की मात्रा को (Q_1) से, चालू वर्ष (2) की मात्रा को (Q_2) से तथा चालू वर्ष (3) की मात्रा को (Q_3) से प्रदर्शित किया जाता है।

(iii) **W=भार (Weight):** किसी वस्तु को उस समूह में सापेक्ष आधार पर दिया गया महत्व।

(iv) **R= मूल्यानुपात (Price Reatives):** किसी वस्तु के लिए निकाला गया साधारण (अभारित) सूचकांक।

(v) P_{01}= आधार वर्ष (0) की कीमतों (P_0) के आधार पर चालू वर्ष (1) का कीमत सूचकांक।

(vi) P_{10}= आधार वर्ष (1) की कीमतों (P_1) के आधार पर चालू वर्ष (0) का कीमत सूचकांक।

(vii) Q_{01}= आधार वर्ष (0) की मात्राओं (Q_0) के आधार पर चालू वर्ष (1) का मात्रा सूचकांक।

(viii) Q_{10}= आधार वर्ष (1) की मात्राओं (Q_1) के आधार पर चालू वर्ष (1) का मात्रा सूचकांक।

(ix) P_{12}= आधार वर्ष (1) की कीमतों (P_1) के आधार पर चालू वर्ष (2) का कीमत सूचकांक।

(x) Q_{12}= आधार वर्ष (1) की मात्राओं (Q_1) के आधार पर चालू वर्ष (2) का मात्रा सूचकांक।

(xi) V_{01}= आधार वर्ष (0) की कुल कीमतों (P_0Q_0) के आधार पर चालू वर्ष (1) का कुल मूल्य (Value) सूचकांक अर्थात् :

$$V_{01} = \frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_0} \times 100$$

सूचकांक निर्माण करने की विधियां:
(Methods of Constructing Index Numbers):

सूचकांकों की रचना एक वस्तु के विभिन्न वर्षों के लिए अथवा दो या दो ये अधिक वस्तुओं के लिए की जा सकती है। एक वस्तु के लिए बनाये गये सूचकांकों को 'साधारण सूचकांक' (Simple Index Number) कहा जाता हे, जबकि दो या दो से अधिक वस्तुओं के आधार पर ज्ञात सूचकांकों को 'संयुक्त सूचकांक' (Composite Index Number) कहा जाता है। अधिकतर सूचकांक दो या दो से अधिक वस्तुओं के आधार पर बनाये जाते हैं इसलिए संयुक्त सूचकांक की प्रकृत्ति के होते हैं।

सूचकांकों की रचना अथवा निर्माण की निम्नलिखित विधियां हैं–

(A) <u>एक चर के लिए</u> (For a Single Variable):

(1) स्थिर आधार (Fixed Base) विधि

(2) श्रृंखला आधार (Chain Base) विधि

(B) <u>चरों के समूहों के लिए</u> (For a Group of Items):

(1) साधारण या अभारित समूहन विधि

(2) अभारित मूल्यानुपातों की औसत विधि

   (i) स्थिर आधार विधि

   (ii) श्रृंखला आधार विधि

(3) भारित मूल्यानुपात विधि या पारिवारिक बजट विधि

(4) भारित समूहन विधि

   (i) लेस्पेयर की विधि

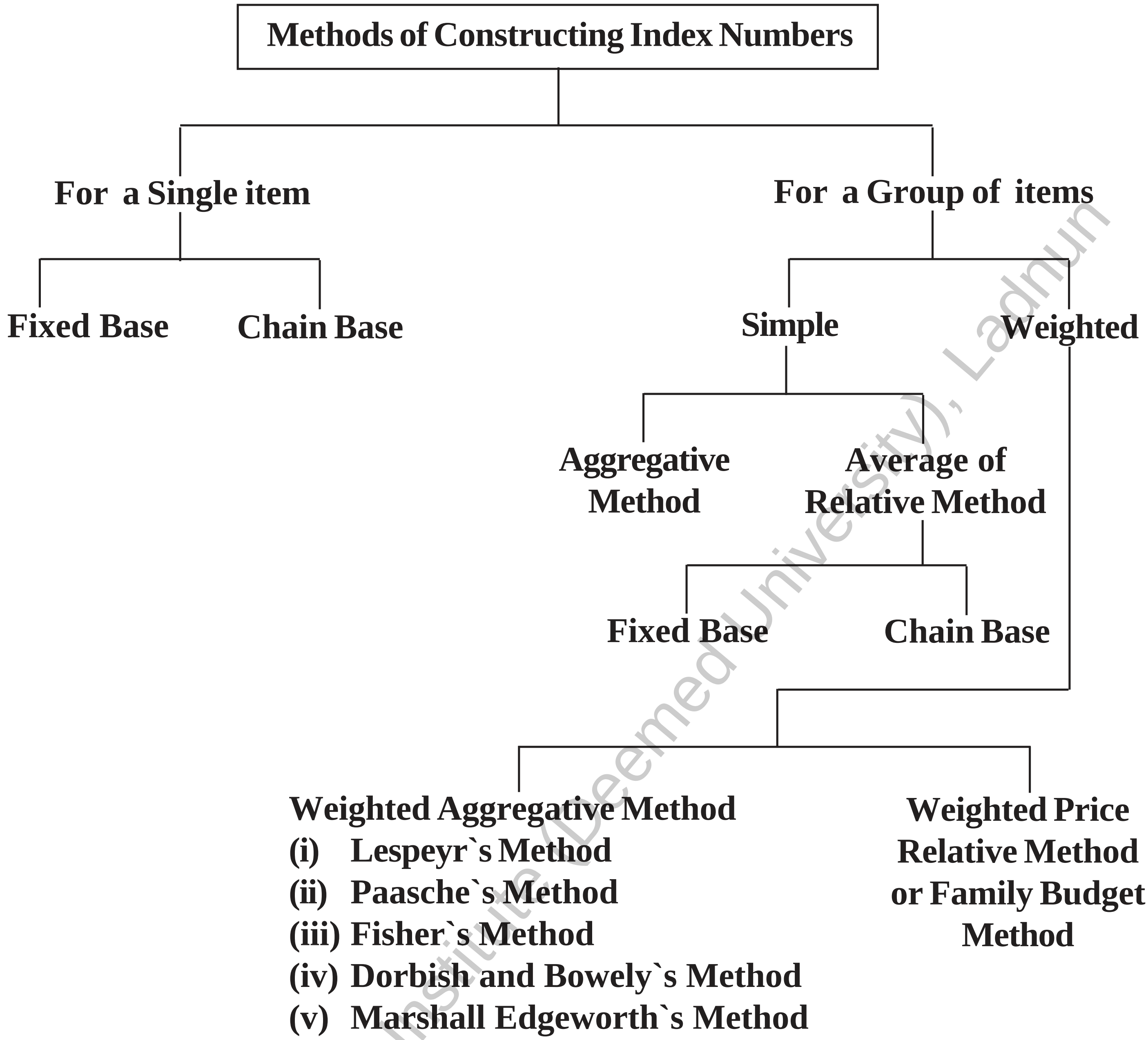
   (ii) पाश्चे की विधि

   (iii) फिशर की विधि

   (iv) डारबीश एवं बाऊले की विधि

   (v) मार्शल–एजवर्थ विधि

उपर्युक्त विधियों को आगे वर्णित चार्ट में दर्शाया गया है:



उपर्युक्त विधियों में से किसी भी विधि का प्रयोग कीमत सूचकांक, मात्रा सूचकांक एवं अन्य सूचकांक बनाने के लिए किया जा सकता है। उपर्युक्त विधियों का प्रयोग हमने सबसे पहले कीमत सूचकांक ज्ञात करने के लिए दिखाया है।

अभारित मूल्य सूचकांकों की रचना
(Construction of Unweighted Price Index Numbers)

एक चर के लिए अभारित मूल्य सूचकांकों की रचना
(Construction of Unweighted Index Numbers for a Single Item):

यदि एक चर के लिए अभारित मूल्य सूचकांक बनाने हो तो सबसे पहले यह निर्धारित किया जाएेगा कि मूल्य सूचकांक स्थिर आधार पर बनाया जाये या श्रृंखला आधार पर।

(A) स्थिर आधार रीति (Fixed Base Method):

जब किसी निश्चित अवधि/ वर्ष के मूल्यों को आधार मानकर अन्य सभी दिये हुए वर्षों के मूल्यों के सूचकांक ज्ञात किये जायें तो वह स्थिर आधार रीति कहलाती है। इस विधि में प्रचलित सभी वर्षों के मूल्य सूचकांकों की गणना के लिए आधार वर्ष एक समान अर्थात् स्थिर रहता है। यहां किसी सामान्य वर्ष के मूल्य को आधार लिया जा सकता है परन्तु सामान्य वर्ष का निर्धारण कठिन हो तो उस दशा में दिए हुए कुछ वर्षों के औसत मूल्य को आधार लिया जा सकता है। स्थिर आधार सूचकांकों की गणना हेतु निम्न सूत्र को प्रयोग में लिया जाता है-

$$\text{Price Index Number} = \frac{\text{Current Year Price}}{\text{Base Year Price}} \times 100$$

आधार वर्ष का मूल्य सूचकांक हमेशा '१००' माना जाता है। यदि प्रश्न में आधार वर्ष नहीं दिया हुआ हो तो सबसे पहले वाले वर्ष को आधार वर्ष माना जाता है।

नोटः आधार वर्ष की कीमत को P_0 से तथा चालू वर्ष की कीमतों को P_1, P_2, P_3, P_4 आदि से दर्शाया गया है। यहां P_1 चालू वर्ष एक (जिसका मूल्य सूचकांक ज्ञात करना है) की कीमतें हैं तथा P_2, P_3, P_4 क्रमशः दूसरे, तीसरे एवं चौथे चालू वर्षों की कीमतें हैं।

(अ) यदि सबसे पहले वाले वर्ष को आधार वर्ष माना जाए तथा दूसरे वर्ष के लिए मूल्य सूचकांक ज्ञात किया जाये तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगाः

$$P_{01} = {}^{P1}/_{P0} \times 100$$

(ब) यदि सबसे पहले वाले वर्ष की कीमतों के आधार पर तीसरे वर्ष का मूल्य सूचकांक ज्ञात किया जाये तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगाः

$$P_{02} = {}^{P2}/_{P0} \times 100$$

(स) यदि सबसे पहले वाले वर्ष की कीमतों के आधार पर चौथे वर्ष का मूल्य सूचकांक ज्ञात किया जाये तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगाः

$$P_{03} = {}^{P3}/_{P0} \times 100$$

एक वर्षीय आधार एवं औसत मूल्य आधार का प्रयोग करते हुए स्थिर आधार सूचकांकों की गणना को निम्न उदाहरण द्वारा आसानी से समझा जा सकता है:

उदाहरण (Illustration)- 1

वस्तु 'A' की निम्नलिखित कीमतों के आधार पर प्रत्येक वर्ष का मूल्य सूचकांक यह मानते हुए बनाइये कि:

(i) वर्ष २००३ की कीमतें, आधार अवधि की कीमतें हैं;

(ii) वर्ष २००८ की कीमतें,आधार अवधि की कीमतें हैं;

(iii) औसत कीमतें, आधार अवधि की कीमतें हैं;

वर्ष	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
कीमतें (रू.)	50	70	90	130	180	200

From the following prices of commodity 'A', compute Price index numbers for each year, assuming:

i) Prices of 2003 as base period price;
ii) Prices of 2008 as base period price;
iii) Average price as base period price.

Year	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Price (Rs.)	50	70	90	130	180	200

हलः-

$$\text{मूल्य सूचकांक का सूत्र} = \frac{\text{चालू अवधि की कीमत}}{\text{आधार अवधि की कीमत}} \text{ X } 100$$

सूचकांकों का निर्माण

Year	Price	2003 as Base	2008 as Base	Average Price as Base
2003	50 (P_0)	100	$^{50}/_{2000}$ x 100=25	$^{50}/_{12\ 0}$ x 100=41.67
2004	70 (P_1)	$^{70}/_{50}$ x 100=140	$^{70}/_{200}$ x 100=35	$^{70}/_{120}$ x 100=58.33
2005	90 (P_2)	$^{90}/_{50}$ x 100=180	$^{90}/_{200}$ x 100=45	$^{90}/_{120}$ x 100=75
2006	130 (P_3)	$^{130}/_{50}$ x 100=260	$^{130}/_{200}$ x 100=65	$^{130}/_{120}$ x 100=08.33
2007	180 (P_4)	$^{180}/_{50}$ x 100=360	$^{180}/_{200}$ x 100=90	$^{180}/_{200}$ x 100=50
2008	200 (P_5)	$^{200}/_{50}$ x 100=400	100	$^{200}/_{120}$ x 100=66.67

$$\text{औसत मूल्य} = \frac{50+70+90+130+180+200}{6} = 120$$

नोटः- आधार वर्ष का सूचकांक हमेशा १०० लिया जाता है।

(B) श्रृंखला आधार सूचकांक (Chain Base Index Numbers):

इस विधि के अर्न्तगत प्रथम वर्ष के मूल्य सूचकांक को १०० माना जाता है। आगे के प्रत्येक वर्ष के लिए उसके तुरन्त पूर्व वाले वर्ष को आधार वर्ष मानकर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हुए श्रृंखला आधार कीमत सूचकांकों की रचना की जाती हैं:

Chain Base Index Number
Or
Link Relative (L.R.)

$$= \frac{\text{Current Year Price}}{\text{Base Year Price}} \text{ X } 100$$

$$= {}^{Pn}/_{P(n-1)} \textbf{ X } 100$$

नोटः श्रृंखला आधार सूचकांकों को ही श्रृंखला मूल्यानुपात (Link Relatives) भी कहा जाता है।

उदाहरण (Illustration)- 2

निम्नलिखित आंकड़ों से श्रृंखला आधार सूचकांकों की रचना कीजिए:

वर्ष	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
कीमतें (रू.)	50	80	100	120	150	200

From the following data construct chain base index numbers

Year	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
Price (Rs.)	50	80	100	120	150	200

Solution:

Construction of Chain Base index numbers

Year	**Price**	**Chain Base Index**
2003	50	100
2004	80	$^{80}/_{50}$ x 100=160
2005	100	$^{100}/_{80}$ x 100=125
2006	120	$^{120}/_{100}$ x 100=120
2007	150	$^{150}/_{120}$ x 100=125
2008	200	$^{200}/_{150}$ x 100=133.33

नोट: दी गयी श्रेणी में प्रथम वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक १०० लिया जाता है तथा प्रत्येक वर्ष के लिए आधार वर्ष तुरन्त पूर्व वाले वर्ष को लिया जाता है।

श्रृंखला सूचकांक (Chain Index Numbers)

श्रृंखला आधार सूचकांकों में प्रत्येक वर्ष के लिए उसके तुरन्त पूर्व वाले वर्ष के मूल्यों का आधार माना जाता है इसलिए यह सूचकांक तुलनायोग्य नहीं होते हैं। श्रृंखला आधार सूचकांकों को तुलनायोग्य बनाने के लिए इन्हें एक निश्चित स्थिर आधार से श्रृंखलित करना होगा। श्रृंखला आधार सूचकांकों को स्थिर आधार सूचकांकों में बदलने पर जो सूचकांक ज्ञात होते है उन्हें श्रृंखला सूचकांक (Chain Index Numbers) कहा जाता है। प्रथम वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक ही श्रृंखला सूचकांक माना जाता है।

इसके पश्चात आगे के वर्षों के लिए निम्न सूत्र द्वारा श्रृंखला सूचकांक ज्ञात किये जाते हैं:

$$\text{श्रृंखला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक X पिछले वर्ष का श्रृंखला सूचकांक}}{100}$$

नोटः श्रृंखला आधार सूचकांक (Chain Base Index) परिवर्तनशील आधार सूचकांक होते हैं जबकि 'श्रृंखला सूचकांक' स्थिर आधार सूचकांक होते हैं।

उदाहरण (Illustration)- 3

निम्नांकित समंकों से: (i) 2003 वर्ष को आधार अवधि मानकर कीमत सूचकांक बनाइए (ii) श्रृंखला आधार सूचकांक बनाइए (iii) 2003 वर्ष से श्रृंखलित कर श्रृंखला सूचकांक बनाइए। यह भी सिद्ध कीजिए कि स्थिर आधार मूल्य सूचकांक एवं श्रृंखला आधार सूचकांक दोनों एक ही हैं।

वर्ष	2003	2004	2005	2006	2007	2008
कीमत (रू.)	50	80	100	120	150	210

From the following data, construct: (i) price index numbers taking 2003 as base period; (ii) chain base index numbers; (iii) chain index numbers chained with 2003. Show that the fixed base price index numbers and the chain index numbers are the same:

Year	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Price (Rs.)	50	80	100	120	150	210

हल Solution:

मूल्य सूचकांकों का निर्माण

वर्ष	मूल्य	२००३ को आधार मानकर स्थिर आधार मूल्य सूचकांक	श्रृंखला आधार सूचकांक	वर्ष २००३ से श्रृंखलित सूचकांक
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
2003	50	100	100	100
2004	80	$^{80}/_{50}$ x 100=160	$^{80}/_{50}$ x 100=160	$^{160}/_{100}$ x 100=160
2005	100	$^{100}/_{50}$ x 100=200	$^{100}/_{80}$ x 100=125	$^{125}/_{100}$ x 160=200
2006	120	$^{120}/_{50}$ x 100=240	$^{120}/_{100}$ x 100=120	$^{120}/_{100}$ x 200=240
2007	150	$^{150}/_{50}$ x 100=300	$^{150}/_{120}$ x 100=125	$^{125}/_{100}$ x 240=300
2008	210	$^{210}/_{50}$ x 100=420	$^{210}/_{150}$ x 100=140	$^{140}/_{100}$ x 300=420

$$\text{स्थिर आधार मूल्य सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{आधार वर्ष का मूल्य}} \times 100$$

$$\text{श्रृंखला आधार मूल्य सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times 100$$

$$\text{श्रृंखला सूचकांक} \quad \frac{\text{चालू वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक X पिछले वर्ष का श्रृंखला सूचकांक}}{100}$$

स्तम्भ (iii) तथा (v) के अंक समान है अत: यह सिद्ध होता है कि स्थिर आधार मूल्य सूचकांक एवं श्रृंखला सूचकांक दोनों एक ही हैं।

मदों के समूह के लिए सूचकांकों का निर्माण
(Construction of Index Number for a Group of Items)

दो या दो से अधिक चरों के आधार पर निर्मित सूचकांकों को संयुक्त सूचकांक (Composite Index Numbers) कहा जाता है। यह सूचकांक अभारित अथवा भारित हो सकते है।

अभारित सूचकांक (Unweighted Index Numbers)

सभी मदों को समान महत्व का मानकर जो सूचकांक बनाये जाते हैं उन्हें अभारित सूचकांक कहा जाता है। ऐसे सूचकांक 'स्थिर आधार सूचकांक' या 'श्रृंखला आधार सूचकांक' हो सकते है।

मदों के समूह के लिए स्थिर आधार सूचकांक (Fixed Base Index for a Group of Items)

मदों के समूह के लिए अभारित स्थिर आधार सूचकांक निम्नांकित दो विधियों में से किसी भी एक विधि से बनाये जा सकते हैं:

(अ) सरल समूहन विधि;

(ब) सरल मूल्यानुपातों की औसत विधि।

(अ) सरल समूहन विधि (Simple Aggregative Method)

इस विधि के अन्तगत सभी वस्तुओं के चालू वर्ष की कीमतों के योग (ΣP_1) में आधार वर्ष की कीमतों के योग (ΣP_0) का भाग देकर १०० से गुणा किया जाता है। यह प्रतिशत परिणाम ही सूचकांक कहलाता है। इसे सूत्र के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$$P_{01} = {}^{\Sigma P1}/_{\Sigma P0} \times 100$$

जहाँ, P_{01} = समयावधि (0) के मूल्यों के आधार पर समयावधि (1) का मूल्य सूचकांक।

ΣP_0 = आधार अवधि (0) के मूल्यों का योग।

ΣP_1 = चालू अवधि (1) के मूल्यों का योग।

(ब) सरल औसत मूल्यानुपात विधि (Simple Average of Relative Method)

इस विधि के अन्तर्गत प्रत्येक मद के लिए अलग-अलग सूचकांक ज्ञात किये जाते है जिन्हें मूल्यानुपात कहा जाता है। इन मूल्यानुपातों को 'R' से प्रदर्शित किया जाता है। मूल्यानुपातों का माध्य अर्थात् औसत मूल्यानुपातों को ही उन मदों के समूह का सूचकांक कहा जाता है।

$$\text{मूल्यानुपात (R)} = \frac{\text{सम्बन्धित मद का चालू वर्ष में मूल्य}}{\text{सम्बन्धित मद का आधार वर्ष में मूल्य}} \times 100$$

अथवा, $R = \frac{P_1}{P_0} \mathbf{X}\ 100$

तथा Price Index Numbers $= {}^{\Sigma R}/_{N}$

यहाँ 'N' का तात्पर्य सम्बधित वर्ग में मदों की कुल संख्या से है।

<u>उदाहरण</u> (Illustration)- 4

निम्नांकित समंकों स 2007 को आधार वर्ष मानकर २००८ एवं २००९ वर्षों के मूल्य सूचकांकों की रचना (i) सरल समूहन विधि, तथा (ii) औसत मूल्यानुपात विधि से कीजिए:

वस्तुएं	इकाई	कीमतें (रूपयों में)		
		2007	**2008**	**2009**
गेहूं	कि. ग्राम	10.00	13.50	18.60
दूध	लिटर	20.00	22.00	24.00
अण्डा	दर्जन	12.00	15.00	18.00
शक्कर	कि. ग्राम	15.00	21.00	24.00
जूता	जोड़ा	143.00	214.50	257.40

Construct index numbers of 2008 and 2009 from the following data taking 2007 as the base year by using (i) simple aggregative method; and (ii) Average of relative method:

Commodity	**Unit**	**Prices (in Rs.) in the year**		
		2007	**2008**	**2009**
Wheat	Kg.	10.00	13.50	18.60
Milk	Litre	20.00	22.00	24.00
Egg	Dozen	12.00	15.00	18.00
Sugar	Kg.	15.00	21.00	24.00
Shoes	Pair	143.00	214.50	257.40

हल **Solution:**

मूल्य सूचकांकों की रचना

वस्तुएं	इकाई	२००७ में मूल्य	२००८ में मूल्र्य	२००९ में मूल्य	मूल्यानुपात 2008 $R_1 = {}^{P1}/_{P0} \times 100$	मूल्यानुपात 2009 $R_2 = {}^{P2}/_{P0} \times 100$
Wheat	Kg.	10.00	13.50	18.60	135	186
Milk	Litre	20.00	22.00	24.00	110	120
Egg	Dozen	12.00	15.00	18.00	125	150
Sugar	Kg.	15.00	21.00	24.00	140	160
Shoes	Pair	143.00	214.50	257.40	150	180
Total		$\Sigma P_0 = 200.00$	$\Sigma P_1 = 286.00$	$\Sigma P_2 = 342.00$	$\Sigma R_1 = 660.00$	$\Sigma R_2 = 796.00$

सरल समूहन विधि से मूल्य सूचकांकों का निर्माण

(Simple aggregative method):

(i) वर्ष २००८ का मूल्य सूचकांक (P_{01}) $= {}^{\Sigma P1}/_{\Sigma P0} \times 100$

$= {}^{286}/_{200} \times 100$

$= 143$

(ii) वर्ष २००९ का मूल्य सूचकांक (P_{02}) $= {}^{\Sigma P2}/_{\Sigma P0} \times 100$

$= {}^{342}/_{200} \times 100$

$= 171$

औसत मूल्यानुपात विधि से मूल्य सूचकांकों का निर्माण

Simple average of Relatives Method:

(i) वर्ष २००८ का मूल्य सूचकांक (P_{01}) $= {}^{\Sigma R1}/_{N}$

$= {}^{660}/_{5}$

$= 132$

(ii) वर्ष २००९ का मूल्य सूचकांक (P_{02}) $= {}^{\Sigma R2}/_{N}$

$= {}^{796}/_{5}$

$= 159.20$

नोटः– अभारित समूहन विधि एवं अभारित मूल्यानुपातों की औसत विधि के अन्तर्गत ज्ञात किये गये सूचकांकों के मान में अन्तर होता है।

मदों के समूह के लिए श्रृंखला आधार सूचकांक
(Chain Base Index For a Group of Items):

इस विधि के अर्न्तगत प्रत्येक मद के लिए अलग-अलग श्रृंखलानुपात (Link Relatives) ज्ञात किये जाते हैं। चालू वर्ष की कीमतों का तुरन्त पूर्व वाले वर्ष की कीमतों से प्रतिशत अनुपात ही श्रृंखलानुपात होते हैं जिनकी गणना निम्न प्रकार से की जाती हैं:

$$\text{श्रृंखलानुपात (Link Relatives)} = \frac{\text{चालू वर्ष की कीमतें}}{\text{तुरन्त पूर्व वाले वर्ष की कीमतें}} \mathbf{X}\ 100$$

श्रृंखलानुपातों के औसत को ही श्रृंखला आधार सूचकांक कहा जाता है। अर्थात्

$$\text{Chain Base Price Index Numbers} = {}^{\Sigma LR}/_{N}$$

मदों के समूह के लिए श्रृंखला सूचकांक
(Chain Index For a Group of Items):

श्रृंखला सूचकांक स्थिर आधार सूचकांक होते हैं जिनकी गणना निम्न सूत्र से की जाती हैं:

$$\text{श्रृंखला सूचकांक (Chain Index)} = \frac{\text{चालू वर्ष का औसत श्रृंखलानुपात } \mathbf{X} \text{ तुरन्त पूर्व वाले वर्ष का श्रृंखला सूचकांक}}{100}$$

उदाहरण (Illustration)- 5

तीन वस्तुओं की निम्नांकित कीमतों से:

(i) श्रृंखला आधार सूचकांक ज्ञात करें तथा उन्हें वर्ष २००६ से श्रृंखलित करें।

(ii) वर्ष २००६ को आधार वर्ष मानकर दोनों विधियों: सरल समूहन तथा औसत मूल्यानुपात विधि से सूचकांकों का निर्माण कीजिए:

	मूल्य (रूपयों में)			
वस्तुएं	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
A	5	8	12	21
B	12	15	21	21
C	20	26	26	39

From the following prices of three commodities:

i) construct the chain base index numbers and chain them to the year 2006.

ii) Construct index numbers taking 2006 as the base year by using both simple aggregative method and average of relative method.

	Prices (in Rs.)			
Articles	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
A	5	8	12	21
B	12	15	21	21
C	20	26	26	39

हल (Solution):

श्रृंखला आधार सूचकांकों एवं श्रृंखला सूचकांकों की गणना

वस्तुएं Articles	2006 Price P_0	2006 L.R.	2007 Price P_1	2007 L.R.	2008 Price P_2	2008 L.R.	2009 Price P_3	2009 L.R.
A	5	100	8	$^{8}/_{5}$ X 100=160	12	$^{12}/_{8}$ X 100=150	21	$^{21}/_{12}$ X 100=175
B	12	100	15	$^{15}/_{12}$ X 100=125	21	$^{21}/_{15}$ X 100=140	21	$^{21}/_{21}$ X 100=100
C	20	100	26	$^{26}/_{20}$ X 100=130	26	$^{26}/_{26}$ X 100=100	39	$^{39}/_{26}$ X 100=150
Σ L.R. = 300				**= 415**		**=390**		**= 425**
Average of L.R. 100				**138.3**		**130**		**141.7**
Chain indices chained with 2006 100				$^{138.3}/_{100}$ x 100 = 138.3		$^{130 \times 138.3}/_{100}$ = 179.8		$^{141.7 \times 179.8}/_{100}$ = 254.8

L.R. का तात्पर्य श्रृंखला मूल्यानुपात **(Link Relatives)** से है जिन्हें श्रृंखला आधार सूचकांक भी कहा जाता है।

$$\text{श्रृंखलानुपात (Link Relatives)} = \frac{\text{चालू वर्ष की कीमतें}}{\text{तुरन्त पूर्व वाले वर्ष की कीमतें}} \times 100$$

Average of L.R का तात्पर्य श्रृंखला मूल्यानुपातों के औसत से है अर्थात कुल श्रृंखलानुपातों का योग में मदों की संख्या का भाग देकर औसत श्रृंखला मूल्यानुपात ज्ञात किया जाता है।

$$\text{श्रृंखला सूचकांक (Chain Index)} = \frac{\text{चालू वर्ष का औसत श्रृंखलानुपात} \times \text{तुरन्त पूर्व वाले वर्ष का श्रृंखला सूचकांक}}{100}$$

स्थिर आधार सूचकांकों की गणना
(आधार वर्ष = २००६)

वस्तुएं Articles	2006 Price P_O	2006 Price Relatives R_O	2007 Price P_1	2007 Price Relatives (R_1)	2008 Price P_2	2008 Price Relatives (R_2)	2009 Price P_3	2009 Price Relatives (R_3)
A	5	100	8	$^{8}/_{5}$ X 100=160	12	$^{12}/_{5}$ X 100=240	21	$^{21}/_{5}$ X 100=420
B	12	100	15	$^{15}/_{12}$ X 100=125	21	$^{21}/_{12}$ X 100=175	21	$^{21}/_{12}$ X 100=175
C	20	100	26	$^{26}/_{20}$ X 100=130	26	$^{26}/_{20}$ X 100=130	39	$^{39}/_{20}$ X 100=195
Total	$\Sigma P_O = 37$	$\Sigma P_0 = 300$	$\Sigma P_1 = 49$	$\Sigma R_1 = 415$	$\Sigma P_2 = 59$	$\Sigma R_2 = 545$	$\Sigma P_3 = 81$	$\Sigma R_3 = 790$

सरल समूहन विधि (Simple Aggregative Method)	औसत मूल्यानुपात विधि (Average of Relative Method)
(i) वर्ष २००६ के लिए मूल्य सूचकांक Price Index Number= 100	**(i) वर्ष २००६ के लिए मूल्य सूचकांक** Price Index Number= $^{\Sigma RO}/_{N} = {}^{300}/_{3} = 100$
(ii) वर्ष २००७ के लिए मूल्य सूचकांक $P_{O1} = {}^{\Sigma P1}/_{\Sigma PO} \times 100$ $= {}^{49}/_{37} \times 100$ $= 132.43$	**(ii) वर्ष २००७ के लिए मूल्य सूचकांक** $R_{O1} = {}^{\Sigma R1}/_{N}$ $= {}^{415}/_{3}$ $= 138.33$
(iii) वर्ष २००८ के लिए मूल्य सूचकांक $P_{O2} = {}^{\Sigma P2}/_{\Sigma PO} \times 100$ $= {}^{59}/_{37} \times 100$ $= 159.46$	**((iii) वर्ष २००८ के लिए मूल्य सूचकांक** $R_{O2} = {}^{\Sigma R2}/_{N}$ $= {}^{545}/_{3}$ $= 181.67$
(iv) वर्ष २००९ के लिए मूल्य सूचकांक $P_{O3} = {}^{\Sigma P3}/_{\Sigma PO} \times 100$ $= {}^{81}/_{37} \times 100$ $= 218.92$	**(iv) वर्ष २००९ के लिए मूल्य सूचकांक** $R_{O3} = {}^{\Sigma R3}/_{N}$ $= {}^{790}/_{3}$ $= 263.33$

उदाहरण (Illustration)- 6

निम्नांकित समंकों से औसत मूल्यों को आधार मानकर मूल्य सूचकांकों की रचना कीजिए (गणना पूर्ण संख्या में करनी है।)

From the following data, construct the price index numbers taking average price as base (calculations should be made in whole numbers)

	Rate Per Rupee		
Year	**Wheat**	**Cotton**	**Oil**
2007	2 Kg.	1 Kg.	1 Kg.
2008	1 Kg.	800 gram.	300 gram.
2009	600 gram.	300 gram.	200 gram.

हल (Solution):

प्रश्न में वस्तुओं की दरें मात्रा के रूप में दी हुई है। अत: प्रश्न को हल करने से पूर्व वस्तुओं की दरों को रूपये प्रति क्विन्टल में बदला गया है। वर्ष २००७ में गेहूं की दरें १००/२=५०रू. प्रति क्विंटल, कपास की दरें १००/१=१०० रू. प्रति क्विंटल है। इसी प्रकार से अन्य वर्षों में वस्तुओं की दरों को ज्ञात किया गया है।

औसत मूल्यों को आधार मानकर मूल्य सूचकांकों की गणना

वस्तुएं	मूल्य प्रति क्विटल			औसत मूल्य P_0	मूल्यानुपात (R)		
	2007	2008	2009		2007	2008	2009
गेहूँ	50	100	167	106	47	94	158
कपास	100	125	333	186	54	67	179
तेल	100	333	500	311	32	107	161
मूल्यानुपातों का योग ΣR					133	268	498
औसत मूल्यानुपात या मूल्य सूचकांक					44	89	166

उदाहरण (Illustration)- 7

वर्ष २००५ में एक सूचकांक १०० था। इसमें वर्ष २००६ में ४ प्रतिशत की वृद्धि हुई, वर्ष २००७ में ६ प्रतिशत की कमी हुई वर्ष २००८ में ५ प्रतिशत की कमी हुई तथा वर्ष २००९ में ४ प्रतिशत वृद्धि हुई। वर्ष २००६ को आधार मानकर मूल्य सूचकांकों का निर्माण कीजिए:-

हल Solution:

मूल्य सूचकांकों का निर्माण

वर्ष	वृद्धि (+)/कमी (-)	स्थिर आधार सूचकांक वर्ष २००५ के आधार पर	नया स्थिर आधार सूचकांक वर्ष २००६ के आधार पर
2005	100 (आधार)	100	$^{100}/_{104}$ X 100= 96.15
2006	+4%	104	100
2007	-6%	104x94/100= 97.26	$^{97.76}/_{104}$ X 100= 94
2008	-5%	97.76x95/100= 92.87	$^{92.87}/_{104}$ X 100= 89.30
2009	+4%	92.87x104/100= 96.58	$^{96.58}/_{104}$ X 100= 92.87

भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers)

सरल या अभारित सूचकांकों की गणना करते समय गणन प्रक्रिया में सम्मिलित सभी वस्तुओं को समान महत्व की मान ली जाती है। वस्तुत: उपयोग में लायी जाने वाली वस्तुओं का उपभोक्ताओं के लिए महत्व तुलनात्मक रूप से अलग-अलग होता है। वस्तुओं के सापेक्ष महत्व देने के लिए उन्हें महत्व के अनुसार भार देकर भारित सूचकांकों का निर्माण किया जाता है। भारित सूचकांक के निर्माण के लिए निम्नांकित दो विधियां प्रचन में हैं:

(i) भारित औसत मूल्यानुपात विधि;

(ii) भारित समूहन विधि।

(i)भारित औसत मूल्यानुपात विधि (Weighted Average of Relative Method):

इस विधि को पारिवारिक बजट विधि भी कहा जाता है। इस विधि के अन्तर्गत सूचकांकों के निर्माण हेतु निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती हैं:

(अ) प्रत्येक मद के लिए मूल्यानुपात ज्ञात करें तथा इन्हें 'R' से प्रदर्शित करें।

(ब) जो भार देना है, इसकी गणना कीजिए। भार को 'W' से इंगित किया जाता है। सामान्य रूप से आधार वर्ष के 'कुल मूल्य भार' (P_0Q_0) प्रयुक्त किये जाते हैं परन्तु कुछ विशिष्ट मूल्यों को भी भार के रूप में प्रयुक्त किया जा सकता है।

(स) मूल्यानुपातों (R) को भार (W) से गुणा करके उनके गुणनफल को 'RW' से इंगित किया जाए।

(द) निम्न सूत्र को प्रयोग में लिया जाए:

मूल्य सूचकांक (Price Index Number) = $^{\Sigma Rw}/_{\Sigma w}$

उदाहरण (Illustration)- 8

निम्नांकित संमकों से, २००८ वर्ष को आधार मानकर २००९ वर्ष के लिए भारित औसत मूल्यानुपात विधि से मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए:

वस्तुएं	प्रति इकाई	2008 कीमत (रू.)	2008 मात्रा	2009 कीमत (रू.)
A	प्रति क्विंटल	3.00	10 क्विंटल	4.00
B	प्रति किग्रा	2.00	20 कि.ग्रा.	2.50
C	प्रति मीटर	1.00	5 मीटर	1.50

From the following data, construct price index numbers for 2009 taking 2008 as base by weighted average of price relative method.

Commodities	Per Unit	2008 Price (Rs.)	2008 Quantity	2009 Price (Rs.)
A	Per Quintal	3.00	10 Quintal	4.00
B	Per Kg.	2.00	20 Kg.	2.50
C	Per Metre	1.00	5 Metre	1.50

हल Solution:

भारित मूल्य सूचकांकों की गणना

वस्तुएं	आधार वर्ष का मूल्य (P_0)	मात्रा Q_0	चालू वर्ष का मूल्य (P_1)	मूल्यानुपात (R)	कुल कीमत (P_0 X Q_0) (W)	भारित मूल्यानुपात (RW)
A	3.00	10	4.00	133.333	30	4,000
B	2.00	20	2.50	125	40	5,000
C	1.00	5	1.50	150	5	750
योग					**ΣW = 75**	**ΣRW = 9,750**

$P_{01} = {}^{\Sigma RW}/_{\Sigma W} = {}^{9750}/_{75} =$ **130 उत्तर**

उदाहरण (Illustration)- 9

निम्नांकित संमकों से, २००८ वर्ष को आधार मानकर २००९ वर्ष के लिए पारिवारिक बजट विधि से जीवन निर्वाह सूचकांकों की गणना कीजिए:

Calculate cost of living index numbers for 2009 from the following data by family budget method taking 2008 as base.

Articles	Unit	Price in 2008	Quantity in 2008	Price in 2009
A	Per Quintal	16.00	10 Quintals	18.00
B	Per Quintal	12.00	2 Quintals	13.50
C	Per Quintal	8.00	50 Kgs.	9.00
D	Per Metre	2.00	60 Metres	2.50
E	Per Kg.	6.00	30 Kgs.	8.00

हल (Solution):

जीवन निर्वाह सूचकांकों की गणना

Articles	Unit	Qty. Q_0	Price in Rs. 2008 (P_O)	Price in Rs. 2009 (P_1)	Value (P_O X Q_O) (W)	Price Relatives $^{P1}/_{P0}$ X 100	Weighted Relatives (RW)
A	Per Quintal	10	16..0	18..0	160	112.50	18,000
B	Per Quintal	2	12.00	13.50	24	112.50	2,700
C	Per Quintal	0.50	8.00	9.00	4	112.50	450
D	Per Metre	60	2.00	2.50	120	125.00	15,000
E	Per Kg.	30	6.00	8.00	180	133.33	24,000
Total					**ΣW = 488**		**ΣRW = 60,150**

नोट:– किसी वस्तु की उपभोग में ली गयी मात्रा की इकाई तथा उस वर्ष की कीमत की इकाई दोनों एक ही रूप में होनी चाहिए। यदि भिन्न इकाइयों में हो तो दोनों को एक ही इकाई में बदलना चाहिए। जैसे– वस्तु C की मात्रा किलोग्राम में दी हुई है और कीमतें प्रति क्विटंल में दी हुई हैं। इसलिए C की मात्रा को क्विटंल में बदला गया है।

उदाहरण (Illustration)- 10

निम्नांकित संमकों से जीवन निर्वाह सूचकांकों की रचना कीजिए। भार इस प्रकार से है: भोजन ५५, वस्त्र १५, किराया २०, ईंधन एवं रोशनी १५ तथा विविध ५.

Contruct a cost of living Index number from the following indices, the weights being food 55, clothing 15, rent 20, fuel and lighting 15 and miscellaneous 5.

Year	Food	Rent	Clothing	Fuel & Lighting	Misc.
2008	105	104	98	100	110
2009	110	112	102	101	115

There is a wage increase of 5% from 2008 to 2009. Is it adequate?

यदि वर्ष २००८ से २००९ में मजदूरी में ५ प्रतिशत की वृद्धि हुई हो तो क्या यह वृद्धि पर्याप्त मानी जावें ?

हल Solution:

नोट:प्रश्न में प्रत्येक मद का सूचकांक दिया हुआ है जिसे मूल्यानुपात (Price Relative) कहा जाता है और R से इंगित किया जाता है।

जीवन निर्वाह सूचकांक की गणना

मद	भार	2008 (R1)	2008 (R1W)	2009 (R2)	2009 (R2W)
भोजन	55	105	5,775	110	6,050
किराया	20	104	2,080	112	2,240
वस्त्र	15	98	1,470	102	1,530
ईंधन एवं रोशनी	15	100	1,500	101	1,515
विविध	5	110	550	115	575
योग	$\Sigma W=110$		$\Sigma R_1W= 11,375$		$\Sigma R_2W = 11,910$

वर्ष 2008 के लिए पारिवारिक बजट विधि से सूचकांक

$= {}^{\Sigma R1W}/_{\Sigma W} = {}^{11,375}/_{110}$

= 103.4

वर्ष 2009 के लिए सूचकांक

$= {}^{\Sigma R2W}/_{\Sigma W} = {}^{11,910}/_{110}$

= 108.3

वर्ष २००८ की तुलना में वर्ष २००९ में मूल्य सूचकांक में (१०८.३-१०३.४)=४.९० की वृद्धि हुई है। मूल्य वृद्धि प्रतिशत =$({}^{4.90}/_{103.4}$ X 100) = 4.74 % हुई। चूंकि मूल्यों में ४.७४ प्रतिशत की वृद्धि हुई है जबकि मजदूरी में ५ प्रतिशत की वृद्धि की गयी है। अत: मजदूरी में वृद्धि पर्याप्त की गयी है।

भारित समूहन विधि
(Weighted aggregative method)

इस विधि को सामूहिक व्यय विधि भी कहा जाता है। इस विधि के अन्तर्गत चालू वर्ष के कुल व्ययों को आधार वर्ष के कुल व्ययों के प्रतिशत रूप में प्रदर्शित किया जाता है। मूल्य सूचकांक ज्ञात करने के लिए सामान्यत: निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है:

कीमत सूचकांक $(P_{O1}) = {}^{\Sigma P1qo}/_{\Sigma POqo}$ X 100

नोट: यहां आधार वर्ष की मात्रा का भार देकर भारित कीमत सूचकांक ज्ञात किया गया है।

उदाहरण (Illustration)- 11

निम्नांकित संमकों से भारित सूचकांकों को ज्ञात कीजिए :

(i) सामूहिक व्यय विधि द्वारा; तथा

(ii) औसत मूल्यानुपात विधि द्वारा।

From the data given below, calculate weighted index numbers by the
(i) Aggregative expenditure method, and (ii) Average of price relative method:

Article	Price in base year P_0	Price in current year P_1	Qty. in base year Q_0
A	20	25	2.50
B	40	60	6.00
C	50	70	8.40
D	30	45	6.67

हल Solution:

भारित मूल्य सूचकांकों की गणना

Articles	P_O	P_1	Q_O	P_1Q_O	$R = {}^{P1}/_{P0} \times 100$	P_OQ_O (W)	RW
A	20	25	2.5	62.5	${}^{25}/_{20} \times 100 = 125$	50	6,250
B	40	60	6.00	360.0	${}^{60}/_{40} \times 100 = 150$	240	36,000
C	50	70	8.40	588.00	${}^{70}/_{50} \times 100 = 140$	420	58,800
D	30	45	6.67	300.0	${}^{45}/_{30} \times 100 = 150$	200	30,000
Total				$\Sigma P_1Q_O = 1310.5$		$\Sigma W = 910$	$\Sigma RW = 131,050$

(i) सामूहिक व्यय विधि

$P_{O1} = {}^{\Sigma P1Qo}/_{\Sigma PoQo} \times 100$

$= {}^{1310.5}/_{910} \times 100$

= 144 Answer

(ii) औसत मूल्यानुपात विधि

$P_{O1} = {}^{\Sigma RW}/_{\Sigma W} \times 100$

$= {}^{131050}/_{910} \times 100$

= 144 Answer

अन्य भारित विधियां (Other Weighted Methods):

सांख्यिकीय के विभिन्न विद्वानों ने अलग–अलग भारों का प्रयोग करते हुए सूचकांक निर्माण के कई सूत्रों का प्रतिपादन किया है। सर्वाधिक प्रचलन वाले महत्वपूर्ण सूत्रों का वर्णन यहां किया गया है:

(i) लेस्पेयर का सूचकांक (Laspeyre's Index Numbers):

लेस्पेयर के सूत्र के अनुसार आधार वर्ष के चरों को भार के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। कीमत सूचकांक के लिए आधार वर्ष की मात्रा का भार दिया जाता है जबकि मात्रा सूचकांक के निर्माण के लिए आधार वर्ष की कीमतों का भार दिया जाता है। इसके लिए अग्रलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता हैं:

भारित मूल्य सूचकांक	भारित मात्रा सूचकांक
$P_{O1} = \Sigma P1Qo / \Sigma PoQo \times 100$	$Q_{O1} = \Sigma PoQ1 / \Sigma PoQo \times 100$
$P_{1O} = \Sigma P0Q1 / \Sigma P1Q1 \times 100$	$Q_{1O} = \Sigma P1Qo / \Sigma P1Q1 \times 100$
$P_{23} = \Sigma P3Q2 / \Sigma P2Q2 \times 100$	$Q_{23} = \Sigma P2Q3 / \Sigma P2Q2 \times 100$

(ii) पाश्चे का सूचकांक (Paasche's Index Numbers:)

पाश्चे का सूचकांक चालू वर्ष के भारों को प्रयुक्त करके बनाये जाते है। पाश्चे के सूचकांक हेतु निम्न सूत्रों को प्रयुक्त किया जाता है:

भारित मूल्य सूचकांक	भारित मात्रा सूचकांक
$P_{O1} = \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQ1 \times 100$	$Q_{O1} = \Sigma P1Q1 / \Sigma P1Qo \times 100$
$P_{1O} = \Sigma P0Q0 / \Sigma P1Q0 \times 100$	$Q_{1O} = \Sigma PoQo / \Sigma PoQ1 \times 100$
$P_{23} = \Sigma P3Q3 / \Sigma P2Q3 \times 100$	$Q_{23} = \Sigma P3Q3 / \Sigma P3Q2 \times 100$

(iii) फिशर का सूचकांक (Fisher's Index Numbers) :

फिशर का सूचकांक आधार वर्ष तथा चालू वर्ष दोनों के भारों पर आधारित है। यह सूचकांक पाश्चे तथा लेस्पेयर दोनों के सूचकांकों का गुणोत्तर माध्य होता है।

$$P_{O1} = \sqrt{L \times P} \quad \text{or} \quad P_{O1} = \sqrt{\Sigma P1Qo / \Sigma PoQo \times \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQ1} \times 100$$

$$P_{1O} = \sqrt{\Sigma PoQ1 / \Sigma P1Q1 \times \Sigma PoQo / \Sigma P1Qo} \times 100$$

$$P_{23} = \sqrt{\Sigma P3Q2 / \Sigma P2Q2 \times \Sigma P3Q3 / \Sigma P2Q3} \times 100$$

$$Q_{O1} = \sqrt{\Sigma P0Q1 / \Sigma PoQo \times \Sigma P1Q1 / \Sigma P1Qo} \times 100$$

$$Q_{10} = \sqrt{\Sigma P1Qo / \Sigma P1Q1 \times \Sigma PoQo / \Sigma PoQ1} \times 100$$

$$Q_{23} = \sqrt{\Sigma P2Q3 / \Sigma P2Q2 \times \Sigma P3Q3 / \Sigma P3Q2} \times 100$$

फिशर के सूचकांक को निम्न कारणों से आदर्श सूचकांक माना जाता है:

(i) यह परिवर्तनशील भारों पर आधारित है तथा चालू वर्ष एवं आधार वर्ष, दोनों अवधियों के चरों के भार पर आधारित होता है।

(ii) यह सूचकांक गुणोत्तर माध्य पर आधारित है जो सापेक्ष परिवर्तनों के लिए सर्वोत्तम औसत माना जाता है।

(iii) यह सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण, तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण एवं इकाई परीक्षण को सन्तुष्ट करता है।

(iv) डोरबिश तथा बाऊले विधि (Dorbish and bowley's method):

डोरबिश तथा बाऊले की भारित सूचकांकों की गणना की विधि के अनुसार लेस्पेयर तथा पाश्चे के सूचकांकों का समानान्तर माध्य लिया जाता है।

सूत्रानुसारः $$P_{O1} = \frac{\text{Lasperyre's Index No.(L) + Paashe`s Index No. (P)}}{2}$$

अथवा $$P_{O1} = \frac{\left(\frac{\Sigma P1Qo}{\Sigma PoQo} + \frac{\Sigma P1Q1}{\Sigma PoQ1}\right) X\ 100}{2}$$

(iv) मार्शल-एजवर्थ विधि (Marshall-Edgeworth Method):

इस विधि में भी चालू एवं आधार वर्ष दोनों की मात्रा के योग को भार के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। वस्तुतः लेस्पेयर तथा पाश्चे के सूत्रों के अंश तथा हर के योग का अनुपात ज्ञात करके मार्शल–एजवर्थ के सूचकांक की गणना सरलता से की जा सकती है।

सूत्रानुसारः $P_{O1} = \left(\frac{\Sigma p1qo + \Sigma p1q1}{\Sigma poqo + \Sigma poq1}\right)$ X 100 Or $P_{01} = \frac{\Sigma(qo + q1)p1}{\Sigma(qo + q1)po}$ X 100

उदाहरण (Illustration)- 12

निम्नांकित संमकों से लेस्पेयर, पाश्चे एवं फिशर की विधियों से मूल्य सूचकांकों एवं मात्रा सूचकांकों का निर्माण कीजिए:

Construct Price and quantity indices by Laspeyre's method, Paasche's method and Fisher's method from the following data:

Commodities	Base Year		Current Year	
	Price	Quantity	Price	Quantity
A	5	25	6	30
B	10	5	15	4
C	3	40	2	50
D	6	30	8	35

हल **Solution:**

सूचकांकों की गणना

Com-modities	Base Year		Current Year		Poqo	P1qo	P1q1	Poq1
	Price (Po)	Qty. (qo)	Price (P1)	Qty. (q1)				
A	5	25	6	30	125	150	180	150
B	10	5	15	4	50	75	60	40
C	3	40	2	50	120	80	100	150
D	6	30	8	35	180	240	280	210
					475 Σ **Poqo**	**545** Σ **P1qo**	**620** Σ **P1q1**	**550** Σ **Poq1**

मूल्य सूचकांक :

लेस्पेयर की विधि से मूल्य सूचकांक

$$= {}^{\Sigma P1q0}/_{\Sigma P0q0} \times 100$$

$$= {}^{545}/_{475} \times 100$$

= 114.74 Answer

पाश्चे की विधि से मूल्य सूचकांक

$$= {}^{\Sigma P1q1}/_{\Sigma P0q1} \times 100$$

$$= {}^{620}/_{550} \times 100$$

= 112.73 Answer

फिशर की विधि से मूल्य सूचकांक

$$= 100\sqrt{{}^{\Sigma P1Qo}/_{\Sigma PoQo} \times {}^{\Sigma P1Q1}/_{\Sigma PoQ1}}$$

$$= 100\sqrt{{}^{545}/_{475} \times {}^{620}/_{550}}$$

$$= 100\sqrt{1.1474 \times 1.1273}$$

$$= 100 \times 1.1373$$

= 113.73 उत्तर

मात्रा सूचकांक :

लेस्पेयर की विधि से मूल्य सूचकांक

$$= {}^{\Sigma q1p0}/_{\Sigma q0p0} \times 100$$

$$= {}^{550}/_{475} \times 100$$

= 115.78 Answer

पाश्चे की विधि से मूल्य सूचकांक

$$= {}^{\Sigma q1p1}/_{\Sigma q0p1} \times 100$$

$$= {}^{620}/_{545} \times 100$$

= 113.76 Answer

फिशर की विधि से मूल्य सूचकांक

$$= 100\sqrt{{}^{\Sigma P0Q1}/_{\Sigma PoQo} \times {}^{\Sigma P1Q1}/_{\Sigma P1Q1}}$$

$$= 100\sqrt{{}^{550}/_{475} \times {}^{620}/_{445}}$$

$$= 100\sqrt{1.1579 \times 1.1376}$$

$$= 100 \times 1.1477$$

= 114.77 उत्तर

Illustration 13.

निम्नलिखित समंकों से ज्ञात कीजिएः-

From the data given below calculate:

(i) Lespeyre`s Price Index Number- लेस्पेयर का मूल्य सूचकांक

(ii) Paasche`s Price Index Number- पाश्चे का मूल्य सूचकांक

(iii) Dorbish`s - Bowley`s Price Index Number- डाबिश एवं बाऊले का मूल्य सूचकांक

(iv) Marshall Edgeworth`s Price Index Number- मार्शल एजवर्थ का मूल्य सूचकांक

(v) Fisher`s Ideal Price Index Number- फिशर का आदर्श मूल्य सूचकांक

वस्तुएं	2008		2009	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
A	5	20	10	20
B	10	40	12	30
C	25	10	30	20
D	15	60	10	40

हल **Solution:**

मूल्य सूचकांकों की गणना

Commodity	2008		2009		P_1Q_O	P_0Q_0	P_1Q_1	P_0Q_1
	P_O Rs.	q_O Kg.	P_1 Rs.	q_1 Kg.				
A	5	20	10	20	200	100	200	100
B	10	40	12	30	480	400	360	300
C	25	10	30	20	300	250	600	500
D	15	60	10	40	600	900	400	600
Total					$\Sigma p_1q_o=1580$	$\Sigma p_oq_o=1650$	$\Sigma p_1q_1=1560$	$\Sigma p_oq_1=1500$

1. लेस्पेयर का मूल्य सूचकांक $P_{01}= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100 = \frac{1580}{1650} \times 100 = 95.75$

2. पाश्चे का मूल्य सूचकांक $P_{01}= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100 = \frac{1560}{1500} \times 100 = 104$

3. डारबिश एवं बाऊले का मूल्य सूचकांक $P_{01} = L+P / _2$

अथवा $$P_{01} = \frac{\left(\frac{\Sigma p1q0}{\Sigma p0q0} + \frac{\Sigma p1q1}{\Sigma p0q1}\right)}{2} \times 100 = \frac{\left(\frac{1580}{1650} + \frac{1560}{1500}\right)}{2} \times 100 = 99.875$$

4. **मार्शल, एजवर्थ का मूल्य सूचकांक**

$$P_{01} = \left(\frac{\Sigma p1q0 + \Sigma p1q1}{\Sigma p0q0 + \Sigma p0q1}\right) \times 100 = \left(\frac{1580 + 1560}{1650 + 1500}\right) \times 100 = \mathbf{99.68}$$

5. **फिशर का मूल्य सूचकांक**

$$P_{01} = \sqrt{L \times P} \quad \text{Or} \quad P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p1q0}{\Sigma p0q0} \times \frac{\Sigma p1q1}{\Sigma p0q1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1580}{1650} \times \frac{1560}{1500}} \times 100 = \sqrt{0.9575 \times 1.04} \times 100 = \mathbf{99.75}$$

सूत्रों की पर्याप्तता का परीक्षण (Tests for Adequacy of Formulae)

अथवा

उत्क्राम्यता परीक्षण (Reversibility Tests)

सूचकांकों के निर्माण में प्रयुक्त होने वाले विभिन्न सूत्रों में से कौनसा सूत्र तुलनात्मक रूप से अच्छा माना जावे अत्यंत महत्वपूर्ण प्रश्न है। इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए कुछ उत्क्राम्यता परीक्षणों का प्रतिपादन किया गया है जिन्हें सूचकांक गणना के सूत्र की पर्याप्तता का परीक्षण कहते हैं। जो सूत्र इन परीक्षणों को सन्तुष्ट करता है वह सूत्र तुलनात्मक रूप से आदर्श सूत्र माना जाता है। उत्क्राम्यता परीक्षण निम्नलिखित चार प्रकार के होते हैं:

(i) इकाई परीक्षण (Unit Test)
(ii) समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)
(iii) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test)
(iv) चक्रीय परीक्षण (Circular Test)

(i) इकाई परीक्षण (Unit Test):

यह परीक्षण इस बात को व्यक्त करता है कि सूचकांक की गणना में प्रयुक्त वस्तुओं की उस इकाई में, जिसमें उनकी कीमत एवं मात्रा दी गई है, कोई परिवर्तन किया जाये तो सूचकांक का आंकलन उससे अप्रभावित रहता है। यदि इकाई में परिवर्तन से सूचकांक के आंकलन में परिवर्तन आता है तो यह माना जायेगा कि वह सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता। सरल समूही विधि (Simple Aggregative Method) को छोड़कर सभी सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट करते हैं।

(ii) समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test):

इस परीक्षण के अनुसार आधार वर्ष के मूल्यों के आधार पर चालू वर्ष के लिए आंकलित मूल्य सूचकांक (P_{01}) तथा चालू वर्ष के मूल्यों के आधार पर आधार वर्ष के लिए आंकलित मूल्य सूचकांक (P_{10}) का गुणनफल इकाई (एक) के बराबर होना चाहिए। इसको सूत्र के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं:

$$P_{01} \mathbf{X} P_{10} = 1$$

इस परीक्षण को अभारित सूचकांक, लेस्पेयर का सूचकांक, डारबिश एवं बाऊले का सूचकांक तथा पाश्चे का सूचकांक संतुष्ट नहीं करता है।

निम्नलिखित सूचकांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करते हैं:

(i) फिशर का सूत्र;
(ii) मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य;
(iii) स्थिर भार के आधार पर समूही विधि से ज्ञात सूचकांक; तथा
(iv) मार्शल–एजवर्थ विधि।

(iii) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test):

इस परीक्षण के अनुसार कीमत सूचकांक तथा मात्रा सूचकांक का गुणफल कुल मूल्य सूचकांक के बराबर होना चाहिए। अर्थात्:

$$P_{01} \mathbf{X} Q_{01} = {}^{\Sigma P1Q1} / {}_{\Sigma PoQo} = V_{01}$$

इस परीक्षण को केवल फिशर का सूत्र ही संतुष्ट करता है, अन्य सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करते हैं।

(iv) चक्रीय परीक्षण (Circular Test):

इस परीक्षण के अनुसार P_{01}, P_{12} तथा P_{20} का गुणनफल इकाई (एक) के बराबर होना चाहिए। अर्थात्:

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1$$

इस सूत्र को फिशर का सूत्र तथा पूर्व में वर्णित अन्य सूत्रों में से कोई भी सूत्र संतुष्ट नहीं करता है। इस परीक्षण को केवल ऐसा सूत्र ही संतुष्ट कर सकता है जिसमें या तो किसी भी भार का प्रयोग न किया गया हो अथवा स्थिर भार का प्रयोग किया गया हो।

उदाहरण (Illustration)- 14

उदाहरण संख्या १२ में दिए गए समंकों से यह सिद्ध कीजिए की सूचकांक कोई उत्क्राम्यता परीक्षण संतुष्ट करता है अथवा नहीं।

With the help of figures of previous illustration 12, show whether the index number satisfies any reversal test or not.

हल Solution:

पूर्व उदाहरण में निम्नांकित मूल्यों को ज्ञात किया गया है:

$\Sigma P_O q_O = 475$, $\Sigma P_1 q_O = 545$, $\Sigma P_1 q_1 = 620$, तथा $\Sigma P_O q_1 = 550$.

विभिन्न सूत्रों का समय उत्क्राम्यता परीक्षण:

यदि $P_{O1} \text{ X } P_{10} = 0$ हो तो यह परीक्षण संतुष्ट माना जावेगा।

(1) लेस्पेयर का सूत्र:- Laspeyre's Formula:

अर्थात् $\boxed{P_{O1} \times P_{10} = 0}$

$P_{O1} = {}^{\Sigma P1Q0}/_{\Sigma P0Q0}$ तथा $P_{10} = {}^{\Sigma P0Q1}/_{\Sigma P1Q1}$

$P_{01} \times P_{10} = {}^{\Sigma P1q0}/_{\Sigma P0q0} \times {}^{\Sigma P0q1}/_{\Sigma P1q1}$

$= {}^{545}/_{475} \times {}^{550}/_{620} \neq 1$

अत: लेस्पेयर के सूत्र द्वारा समय उत्क्राम्यता परीक्षण सन्तुष्ट नहीं किया जाता है।

(2) **पाश्चे का सूत्र:**

$P_{O1} = {}^{\Sigma P1Q1}/_{\Sigma P0Q1}$ तथा $P_{10} = {}^{\Sigma P0Q0}/_{\Sigma P1Q0}$

$P_{01} \times P_{10} = {}^{620}/_{550} \times {}^{475}/_{545} \neq 1$

अत: पाश्चे के सूत्र द्वारा समय उत्क्राम्यता परीक्षण सन्तुष्ट नहीं किया जाता है।

फिशर का सूत्रः (Fisher`s Formula :)

$$P_{O1} = \sqrt{\Sigma P1Qo / \Sigma PoQo \; \mathbf{X} \; \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQ1} \quad \textbf{and} \quad P_{10} = \sqrt{\Sigma P0Q1 / \Sigma P1Q1 \; \mathbf{X} \; \Sigma P0Q0 / \Sigma P1Q0}$$

$$P_{01} \mathbf{X} P_{10} = \sqrt{\Sigma P1Qo / \Sigma PoQo \; \mathbf{X} \; \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQ1} \; \mathbf{X} \sqrt{\Sigma P0Q1 / \Sigma P1Q1 \; \mathbf{X} \; \Sigma P0Q0 / \Sigma PoQ0}$$

$$= \sqrt{545/475 \; \mathbf{X} \; 620/550 \; \mathbf{X} \; 550/620 \; \mathbf{X} \; 475/545}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

अतः फिशर के सूत्र द्वारा उत्क्राम्यता परीक्षण सन्तुष्ट किया जाता है।

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षणः- (Factor Reversal Test):

यदि $P_{01} \mathbf{X} Q_{01} = \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQo = 620/475$ हो तो यह परीक्षण सन्तुष्ट माना जावेगा।

1.लेस्पेयर के सूत्र का तत्व उत्क्राम्यता परीक्षणः- Laspeyre`s Formula:

$$P_{01} \mathbf{X} Q_{01} = \Sigma P1Q0 / \Sigma P0Q0 \; \mathbf{X} \; \Sigma P0Q1 / \Sigma PoQ0$$

$$= 545/475 \; \mathbf{X} \; 550/475$$

$$\neq 620/475$$

अतः लेस्पेयर का सूत्र तत्व उत्क्रम्यता परीक्षण संतुष्ट नहीं करता है।

2.पाश्चे के सूत्र का तत्व उत्क्राम्यता परीक्षणः- Paasche`s Formula:

$$P_{01} \mathbf{X} Q_{01} = \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQ1 \; \mathbf{X} \; \Sigma P1Q1 / \Sigma P1Q0$$

$$= 620/550 \; \mathbf{X} \; 620/545$$

$$\neq 620/475$$

अतः पाश्चे का सूत्र भी तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण संतुष्ट नहीं करता है।

3.फिशर के सूत्र का तत्व उत्क्राम्यता परीक्षणः- Fisher`s Formula :

$$P_{01} \mathbf{X} Q_{01} = \sqrt{\Sigma P1Qo / \Sigma PoQo \; \mathbf{X} \; \Sigma P1Q1 / \Sigma PoQ1} \; \mathbf{X} \sqrt{\Sigma P0Q1 / \Sigma P0Q0 \; \mathbf{X} \; \Sigma P1Q1 / \Sigma P1Q0}$$

$$= \sqrt{545/475 \; \mathbf{X} \; 620/550 \; \mathbf{X} \; 550/475 \; \mathbf{X} \; 620/545}$$

$$= \sqrt{620/475 \; \mathbf{X} \; 620/475} = 620/475$$

अतः फिशर का सूत्र तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण संतुष्ट करता है।

आधार परिवर्तन (Base Conversion):

कई बार यह आवश्यक हो जाता है कि दी गयी सूचकांक माला का आधार परिवर्तन कर निर्णय किया जावे। मूल श्रेणी दी हुई नहीं होती है। ऐसी दशा में श्रेणी का आधार बदलने की प्रक्रिया की जाती है, जिसे आधार परिवर्तन कहते है। इस प्रक्रिया में स्थिर आधार सूचकांकों को श्रृंखला आधार में तथा श्रृंखला आधार सूचकांकों को स्थिर आधार में निम्नलिखित विधियों से बदला जा सकता है :

स्थिर आधार सूचकांकों को श्रृंखला आधार सूचकांकों में बदलना
(Conversion of Fixed Base Index into Chain Base Index):

प्रक्रिया:

(i) प्रथम वर्ष के श्रृंखला आधार सूचकांक को १०० माना जाता है।

(ii) आगामी वर्षों के लिए श्रृंखला आधार सूचकांकों को निम्न सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जाता है–

$$\text{प्रचलित वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}}{\text{तुरन्त पूर्व वाले वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}} \times 100$$

$$\text{Chain Base Index} = \frac{\text{Fixed Base Index of the Current Year}}{\text{Fixed Base Index of the Previous Year}} \times 100$$

Illustration 15

निम्नलिखित श्रृंखला सूचकांकों से श्रृंखला आधार सूचकांक बनाइयें :–

From the following chain index numbers construct chain base index numbers:

Year	2004	2005	2006	2007	2008
Chain Index Numbers	300	450	420	500	520

Solution:

Calculation of Chain Base Index Numbers

Year	Chain Index Numbers	Chain Base Index Numbers
2004	300	100
2005	450	$450 \times 100/300 = 150$
2006	420	$420 \times 100/450 = 93.33$
2007	500	$500 \times 100/420 = 119.05$
2008	520	$520 \times 100/500 = 104$

श्रृंखला आधार सूचकांकों को स्थिर आधार सूचकांकों में बदलना
(Conversion of Chain Base Index into Fixed Base Index):

प्रक्रिया:

(i) यदि प्रथम वर्ष से तुरन्त पूर्व वाले वर्ष को आधार माना जाता है तो प्रथम वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक ही स्थिर आधार सूचकांक भी माना जाएगा। यदि प्रथम वर्ष को ही आधार वर्ष मानकर सूचकांकों की रचना करनी हो तो प्रथम वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक १०० माना जाएगा।

(ii) आगामी वर्षों के लिए सूचकांक निम्न सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किये जावेगें:-

$$\text{स्थिर आधार सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक} \times \text{पिछले वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}}{१००}$$

$$\text{Fixed base index numbers} = \frac{\text{Chain Base Index Number of current year} \times \text{Chain Index of previous year}}{100}$$

स्थिर आधार सूचकांक को ही श्रृंखला सूचकांक भी कहा जाता है। उपर्युक्त सूत्र श्रृंखला सूचकांक ज्ञात करने का ही है।

Illustration 16.

निम्नांकित श्रृंखला आधार सूचकांकों से स्थिर आधार सूचकांकों की रचना कीजिए:-

From the following chain base index numbers, construct fixed base index numbers:

वर्ष	2004	2005	2006	2007	2008
श्रृंखला आधार सूचकांक	120	150	90	120	104

हल Solution:

स्थिर आधार सूचकांकों की गणना

वर्ष	श्रृंखला आधार सूचकांक	२००३ के आधार पर स्थिर आधार सूचकांक	२००४ के आधार पर स्थिर सूचकांक
2004	120	120	100
2005	150	$150 \times 120/_{100} = 180$	$150 \times 100/_{100} = 150$
2006	90	$90 \times 180/_{100} = 162$	$90 \times 150/_{100} = 135$
2007	120	$120 \times 162/_{100} = 194.40$	$120 \times 125/_{100} = 162$
2008	104	$104 \times 194.40/_{100} = 202.18$	$202.18 \times 162/_{100} = 327.53$

आधार वर्ष परिवर्तन
(Base Year Shifting)

जब दो सूचकांक श्रेणियों की आपस में तुलना की जाती हो तो सर्वप्रथम यह देखना आवश्यक होता है कि क्या दोनों श्रेणियों का आधार वर्ष समान है। यदि नहीं, तो सूचकांकों के आधार वर्ष में आवश्यक परिवर्तन करके उन्हें तुलनीय बनाना होगा। अर्थात् समान आधार वर्ष से सूचकांकों के निर्माण करने की प्रक्रिया को आधार वर्ष परिवर्तन कहा जाता है। नये आधार वर्ष का सूचकांक १०० माना जायेगा तथा अन्य वर्षों के नये सूचकांक निम्न सूत्र से ज्ञात किये जाऐंगें:

$$\text{नया सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \mathbf{X}\ 100$$

$$\text{New Index Number} = \frac{\text{Old Index Number of Current Year}}{\text{Old Index Number of New Base Year}} \mathbf{X}\ 100$$

उदाहरण:- **Illustration 17.**

आधार वर्ष (अ) २००६ तथा (ब) २००९ के आधार पर सूचकांकों का निर्माण कीजिए:-

Compute index numbers by shifting base year to (a) 2006 and (b) 2009.

Year	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
Index No.	100	240	360	400	450	500	600

हल Solution:

नये आधार वर्ष का सूचकांक १०० माना जाता है।

$$\textbf{अन्य वर्षों के नये आधार सूचकांक} = \frac{\textbf{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\textbf{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \mathbf{X}\ 100$$

Computation of Shifted Index Numbers

Year	**Index Numbers (Base Year 2003)**	**Base Year Shifted to 2006**	**Base Year Shifted to 2009**
		Index Numbers	**Index Numbers**
2003	100	$^{100}/_{400}$ **X** 100 = 25	$^{100}/_{600}$ **X** 100 = 16.67
2004	240	$^{240}/_{400}$ **X** 100 = 60	$^{240}/_{600}$ **X** 100 = 40.00
2005	360	$^{360}/_{400}$ **X** 100 = 90	$^{360}/_{600}$ **X** 100 = 60.00
2006	400	100	$^{400}/_{600}$ **X** 100 = 66.67
2007	450	$^{450}/_{400}$ **X** 100 = 112.50	$^{450}/_{600}$ **X** 100 = 75.00
2008	500	$^{500}/_{400}$ **X** 100 = 125	$^{500}/_{600}$ **X** 100 = 83.33
2009	600	$^{600}/_{400}$ **X** 100 = 150	100

शिरोबंधन (Splicing):

प्राय: देखा जाता है कि एक विशिष्ट आधार वर्ष पर लगातार बनी हुई सूचकांक माला को किसी कारणवश बंद कर दिया जाता है तथा उस सूचकांक माला के बंद होने वाले वर्ष को आधार मानकर नई सूचकांक माला का सजृन किया जाता है। किन्तु इस अवस्था में समंकों की तुलनीयता बनाये रखने के लिए यह आवश्यक होगा कि नई सूचकांक माला को पुराने सूचकांक माला से जोड़ा जाये। वस्तुत: पुरानी तथा नई सूचकांक मालाओं को एक दूसरे से सम्बन्धित करने की प्रक्रिया को शिरोबंधन करना कहते हैं जिसके लिए दोनों श्रेणियों के उभयनिष्ट वर्ष के सूचकांकों का अनुपात ज्ञात करके उसे नई श्रेणी के सूचकांकों से गुणा कर दिया जाता है। उल्लेखनीय है कि जहां दो श्रेणियां दी हुई हो एक नये आधार पर तथा दूसरे पुराने आधार पर वहां शिरोबंधन आधार परिवर्तन का ही एक विशिष्ट प्रयोग है। शिरोबंधन के सूत्र निम्न प्रकार हैं:

(i) जब नई श्रेणी से पुरानी श्रेणी का शिरोबंधन करना हो:
(When Old Index Series is Spliced to New Index Series):

$$\text{शिरोबन्धित सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \mathbf{X}\ 100$$

नोट: यही सूत्र आधार वर्ष परिवर्तन के लिये भी लागू होता है।

(i) जब पुरानी श्रेणी से नई श्रेणी का शिरोबंधन करना हो :-
(When New Index Series is Spliced to Old Index Series):

$$\text{शिरोबन्धित सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का सूचकांक } \mathbf{X} \text{ नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}}{\text{१००}}$$

<u>उदाहरण</u> (Illustration)- 18

नीचे दो श्रेणियों के सूचकांक दिये हुए हैं। प्रथम श्रेणी A का द्वितीय श्रेणी B से शिरोबंधन कीजिए तथा द्वितीय श्रेणी B का प्रथम श्रेणी A से भी शिरोबंधन कीजिए। दोनों ही दशाओं में वर्ष २००१ से २००९ तक सूचकांकों की एक सतत् श्रेणी दिखाइये।

Following are the indices of two series. Splice first series A to second series B and also second series B to first series A and show a continuous series of index numbers from 2001 to 2009.

Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Index Nos(A)	100	110	150	180	200	-	-	-	-
Index Nos(B)	-	-	-	-	100	110	150	160	170

हल **Solution:**

शिरोबंधित श्रेणियों का निर्माण

Year	Index Nos(A)	Index Nos(B)	A श्रेणी का B श्रेणी से शिरोबंधन (Base Year = 2005)	B श्रेणी का A श्रेणी से शिरोबंधन (Base Year = 2001)
2001	100	-	$^{100}/_{200}$ **X** 100 = 50	100
2002	110	-	$^{100}/_{200}$ **X** 110 = 55	110
2003	150	-	$^{100}/_{200}$ **X** 150 = 75	150
2004	180	-	$^{100}/_{200}$ **X** 180 = 90	180
2005	200	100	100	200
2006	-	110	110	$^{200}/_{100}$ **X** 110 = 220
2007	-	150	150	$^{200}/_{100}$ **X** 150 = 300
2008	-	160	160	$^{200}/_{100}$ **X** 160 = 320
2009	-	170	170	$^{200}/_{100}$ **X** 170 = 340

सूचकांकों की अपस्फीति (Deflating of Index Numbers):

वस्तुत: मूल्यस्तर में आये परिवर्तनों के आय पर पड़ने वाले प्रभाव को निरस्त करके आय को उसके वास्तविक मूल्य तक सीमित करने के लिए जो प्रावधान किया जाता है उसे अपस्फीति कहते हैं।

किसी राष्ट्र या व्यक्ति की आय को स्थिर मूल्य पर आंकलित करना एक महत्वपूर्ण कार्य है। उदाहरणार्थ यदि अंकित की आय वर्ष १९९९ में १५००० रू. मासिक थी जो बढ़कर २००९ में ३०००० रू. हो गयी जबकि इन दोनों वर्षों में सूचकांक क्रमश: १०० एवं ३०० थे। यहां अंकित की आय के मूल समंकों को देखने से तो यह प्रतीत होता है कि इन १० वर्षों में उसकी आय दो गुना हो गयी जबकि वस्तु स्थिति यह है कि वर्ष १९९९ की तुलना में वर्ष २००९ की आय बढ़ने के स्थान पर घटी है। दूसरे शब्दों में उसकी आय जो वर्ष १९९९ में १५००० रू. थी, सूचकांकों की अपस्फीति के द्वारा यह ज्ञात होता है कि वर्ष २००९ में अंकित की वास्तविक आय $^{३००००}/_{३००}$ **X**१०० = १०००० रू. ही रह गयी है।

सूचकांकों की अपस्फीति द्वारा वास्तविक आय स्थिर मूल्यों पर निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात की जा सकती है:

$$\text{वास्तविक मजदूरी (Real Wages)} = \frac{\text{मौद्रिक मजूदरी}}{\text{चालू वर्ष का मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

$$\text{वास्तविक आय (Real Income)} = \frac{\text{मौद्रिक आय}}{\text{चालू वर्ष का मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

$$\text{वास्तविक आय सूचकांक (Real Income Index)} = \frac{\text{मौद्रिक आय का सूचकांक}}{\text{चालू वर्ष का मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

अथवा

$$\text{वास्तविक आय सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष की वास्तविक आय}}{\text{आधार वर्ष की वास्तविक आय}} \times 100$$

उदाहरण (Illustration)- 19

निम्नांकित समंकों से वर्ष २००३ को आधार मानकर वास्तविक आय सूचकांकों की गणना कीजिए:

From the following data, calculate 'Real income index numbers' taking 2003 as base period:

Year	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Wages	2000	2400	3500	3600	3800	3900	4950
Price Indices	100	160	175	200	250	300	330

हल (Solution)

$$\text{Real Income} = \frac{\text{Monetary Income}}{\text{Price index of Current Year}} \times 100$$

$$\text{Real Income Index Number} = \frac{\text{Real Wages of the Current Year}}{\text{Real Wages of the Base Year}} \times 100$$

वास्तविक आय तथा वास्तविक आय सूचकांकों की गणना

Year	Wages Rs.	Price Indcies	Real Income	Real Income Index No (Base Year = 2003)
2003	2000	100	$^{2000}/_{100} \times 100 = 2000$	100
2004	2400	160	$^{2400}/_{160} \times 100 = 1500$	$^{1500}/_{2000} \times 100 = 75$
2005	3500	175	$^{3500}/_{175} \times 100 = 2000$	$^{2000}/_{2000} \times 100 = 100$
2006	3600	200	$^{3600}/_{200} \times 100 = 1800$	$^{1800}/_{2000} \times 100 = 90$
2007	3800	250	$^{3800}/_{250} \times 100 = 1520$	$^{1520}/_{2000} \times 100 = 76$
2008	3900	300	$^{3900}/_{300} \times 100 = 1300$	$^{1300}/_{2000} \times 100 = 65$
2009	4950	330	$^{4950}/_{330} \times 100 = 1500$	$^{1500}/_{2000} \times 100 = 75$

अभ्यासार्थ प्रश्न
(Self Examination Questions)

(A) वस्तुनिष्ट प्रश्न (OBJECTIVE ANSWER TYPE QUESTIONS)

निम्नांकित प्रत्येक प्रश्न का एक सही उत्तर लिखिए-

१. सूचकांक .... परिवर्तनों को दिखाते हैं न कि परिवर्तनों का निरपेक्ष मान।
(अ) प्रतिशत (ब) दशकीय (स) दोनों (द) कुछ भी नहीं ( )

२. एक सूचकांक समय श्रेणी दो या अधिक समयावधियों के ....की सूची है।
(अ) निरपेक्ष संख्याओं (ब) सापेक्ष संख्याओं (स) सूचकांकों (द) कुछ भी नहीं ( )

३. सूचकांक .... के बराबर होता है।
(अ) मूल्यानुपातों के औसत (ब) मूल्यानुपातों के योग
(स) मूल्यानुपातों के गुणनफल (द) आधार वर्ष की कीमत **X** १०० ( )

४. सूचकांक ज्ञात करने के लिए सर्वोत्तम माध्य ....है।
(अ) हरात्मक माध्य (ब) गुणोत्तर माध्य
(स) मध्यका (द) समान्तर माध्य ( )

५. पाश्चे का सूचकांक .... पर आधारित है।
(अ) चालू अवधि के भारों (ब) आधार वर्ष के भारों
(स) चालू तथा आधार अवधि के भारों के औसत (द) प्रमाप भारों ( )

६. फिशर का आदर्श सूचकांक, लेस्पेयर एवं पाश्चे के सूचकांकों का ....है।
(अ) मध्यका (ब) समान्तर माध्य
(स) बहुलक (द) गुणोत्तर माध्य ( )

७. मूल्यानुपातों को निम्न रूप में प्रदर्शित किया जाता है:
(अ) $R= {}^{Pn}/_{Po}\ X100$ (ब) $R= {}^{Po}/_{Pn}$
(स) $R= {}^{Pn}/_{Po}$ (द) $R= {}^{Po}/_{Pn}\ X100$ ( )

८. P_{01} का तात्पर्य .... मूल्य सूचकांक से है।
(अ) समयावधि १ के आधार पर ० का (ब) समयावधि ० के आधार पर १ का
(स) समयावधि १ के आधार पर १ का (द) समयावधि ० के आधार पर ० का ( )

९. Q_{10} का तात्पर्य .... मात्रा सूचकांक से है।
(अ) समयावधि १ के आधार पर ० का (ब) समयावधि ० के आधार पर १ का
(स) समयावधि १ के आधार पर १ का (द) समयावधि ० के आधार पर ० का ( )

१०. जब कीमत सूचकांक तथा मात्रा सूचकांक का गुणनफल सम्बन्धित कुल मूल्य सूचकांक के बराबर हों, तब ....सन्तुष्ट होता है।
(अ) इकाई परीक्षण (ब) समय उत्क्राम्यता परीक्षण
(स) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (द) चक्रीय परीक्षण ( )

११. लेस्पेयर एवं पाश्चे के सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण...............
(अ) को सन्तुष्ट करते हैं। (ब) को सन्तुष्ट नहीं करते हैं। (स) हैं। (द) नहीं हैं। ( )

१२. फिशर का सूत्र ....सन्तुष्ट करता है।
(अ) चक्रीय परीक्षण (ब) समय उत्क्राम्यता परीक्षण
(स) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (द) **ब** व **स** दोनों ( )

१३. आधार वर्ष का सूचकांक हमेशा ....लिया जाता है।

(अ) १ (ब) ५० (स)२०० (द) १०० ( )

१४. यदि आधार वर्ष की तुलना में एक वस्तु की कीमतें १२५% बढ़ गयी, तब उस वस्तु का मूल्य सूचकांक .... है।

(अ) १०० (ब) १२५ (स) २२५ (द) उपर्युक्त में से कोई नहीं ( )

१५. यदि किसी स्थान पर वर्ष १९९१ के आधार पर वर्ष २००९ में कीमत सूचकांक ४५० है, तो औसत रूप से मूल्य में वृद्धि ....हुई।

(अ) ४.५० गुणा (ब) ३.५० गुणा (स) ३५०% (द) **ब** व **स** दोनों ( )

१६. समयावधि **२** के लिए श्रृंखलानुपातों को ....से दिखाया जाता है।

(अ) $^{P2}/_{Po}$ X 100 (ब) $^{P2}/_{P1}$ X 100

(स) $^{P1}/_{Po}$ X 100 (द) उपर्युक्त में से कोई नहीं ( )

उत्तरः **१.** (अ), **२.** (स), **३.** (अ), **४.** (ब), **५.** (अ), **६.** (द), **७.** (अ), **८.** (ब), **९.** (अ), **१०.** (स), **११.** (ब), **१२.** (द), **१३.** (द), **१४.** (स), **१५.** (द), **१६.** (ब).

(B) लघूत्तरात्मक प्रश्न (Short Answer Type Questions):

(अधिकतम सीमाः ५० शब्द)

१. सूचकांक क्या हैं ?

२. श्रृंखला आधार सूचकांक का अर्थ एवं सूत्र लिखिए।

३. स्थिर आधार सूचकांक एवं श्रृंखला आधार सूचकांक में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

४. आधार वर्ष परिवर्तन से आप क्या समझते हैं ?

५. आधार वर्ष परिवर्तन तथा आधार परिवर्तन में क्या अन्तर है ?

(C) निबन्धात्मक सैद्धान्तिक प्रश्नः

१. सूचकांक क्या हैं ? सूचकांकों की रचना में आने वाली समस्याओं का परीक्षण कीजिए।

२. स्थिर एवं श्रृंखला आधार सूचकांकों में अन्तर स्पष्ट कीजिए। इस अन्तर को स्पष्ट करने के लिए एक उपयुक्त उदाहरण दीजिए।

३. उपयुक्त उदाहरणों द्वारा **भारित समूहन विधि** तथा **भारित मूल्यानुपात विधि** को समझाइये।

(D) संख्यात्मक प्रश्न (Numerical Questions):

१. निम्न समंकों से मूल्य सूचकांकों की रचना कीजिए।

(i) २००५ को आधार वर्ष मानकर;

(ii) २००७ को आधार वर्ष मानकर।

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009
कीमत (रू.)	240	320	300	360	240

{उत्तरः- (i) 100, 133.33, 125, 150, 100 (ii) 80, 106.67, 100, 120, 80}

२. निम्न समंकों से मूल्य सूचकांकों का निर्माण कीजिए: (i) औसत मूल्यों को आधार मानकर;
(ii) श्रृंखला आधार सूचकांक (iii) २००४ से श्रृंखला सूचकांक।

वर्ष	2004	2005	2006	2007	2008	2009
कीमत (रू.)	200	280	240	160	240	320

{उत्तरः - (a) 83.33, 116.67, 100, 66.67, 100, 133.33 (b) 100, 140, 85.71, 66.67, 150.00, 133.33 (c) 100, 140, 120, 80, 120, 160 }

३. निम्नांकित समंकों से २००८ वर्ष को आधार मानकर वर्ष २००९ के लिए कीमत सूचकांकों का निर्माण कीजिए:
(i) सामूहिक कीमत विधि से; (ii) मूल्यानुपातों की औसत विधि से।

वस्तुएं	कीमत (रू.)	
	2008	**2009**
A	**10**	**20**
B	**6**	**3**
C	**12**	**8**
D	**14**	**28**
E	**4**	**7**

{उत्तरः - (i) 24.47 (ii) 138.33 }

४. तीन वर्षों के लिए औसत कीमतों को आधार मानकर मूल्य सूचकांकों का निर्माण कीजिए:

Year	(Rate per Rupees 100)		
	Wheat	Cotton	Rice
I	10 Kgs.	4 Kgs.	3 Kgs.
II	9 Kgs.	3.5 Kgs.	3 Kgs.
III	9 Kgs.	3.5 Kgs.	2 Kgs.

{उत्तरः - (i) 90; 98; 112 }

५. तीन वस्तुओं की निम्नांकित कीमतों से: (i) श्रृंखला आधार सूचकांक ज्ञात कीजिए (ii) वर्ष २००५ से उन्हें श्रृंखलित कीजिए।

वस्तुएं	कीमत (रू.)				
	2005	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
A	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**
B	**32**	**40**	**48**	**60**	**72**
C	**16**	**20**	**32**	**40**	**48**

{उत्तरः- (i) 100, 133.33, 137.78, 125, 120 (ii) 100, 133.33, 183.70, 229.62, 275.55 }

६. वर्ष २००८ के मूल्यों के आधार पर वर्ष २००९ के लिए मूल्य सूचकांकों को ज्ञात कीजिए:
(i) भारित व्यय विधि से (ii) पारिवारिक बजट विधि से।

Quantity Article	Consumed in 2008	Unit	Price in 2008 (Rs.)	Price in 2009 (Rs.)
Wheat	2 Quintals	per quintal	100.00	200.00
Rice	1 Quintal	per quintal	160.00	220.00
Arhar	20Kgs.	Per Kg.	1.20	2.80
Sugar	0.5 Quintal	Per Kg.	2.00	3.00
Salt	10Kgs.	per quintal	40.00	60.00
Oil	10 Kgs.	Per Kg.	4.00	8.00
Clothing	20 metres	Per metre	3.00	5.00
Fiel	4 Quintals	per quintal	16.00	20.00
House rent	1 House	per house	20.00	30.00

[Ans. 166.96]

७. वर्ष २००६ को आधार मानकर जीवन निर्वाह सूचकांको का निर्माण कीजिए:

Commoding	**Weights**	**Prices (in Rs.)**			
		2006	**2007**	**2008**	**2009**
A	**4**	**30**	**36**	**48**	**60**
B	**3**	**12**	**24**	**30**	**16**
C	**2**	**4**	**4**	**6**	**6**

[Ans. 100, 142.22, 187.78, 166.67]

८. निम्नांकित समंकों से लेस्पेयर, पाश्चे तथा फिशर की विधियों से कीमत एवं मात्रा सूचकांकों का निर्माण कीजिए:

2008 Base year		2009 (current year)		
Articles	Price Per unit (Rs.)	Total expenditure (Rs.)	Total expenditure (Rs.)	Quantity (Kgs.)
A	3	150	280	28
B	1	100	120	60
C	2	100	180	30
D	5	150	144	12
E	4	160	216	18

यह भी सिद्ध कीजिए कि फिशर का आदर्श सूचकांक तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण एवं समय उत्क्राम्यता परीक्षण को सन्तुष्ट करता है।

[उत्तर:- 279.41, 279.76, 279.58]

९. (अ) निम्नांकित स्थिर आधार सूचकांकों से श्रृंखला आधार सूचकांकों का निर्माण कीजिए:

Years	2005	2006	2007	2008	2009
Fixed base index nos.	80	90	95	100	105

(ब) निम्नांकित श्रृंखला आधार सूचकांकों से स्थिर आधार सूचकांकों का निर्माण कीजिए:

Years	2005	2006	2007	2008	2009
Chain base index nos.	80	100	90	95	105

[उत्तर (अ) 100, 112.5, 105.55, 105.2, 105]
[(ब) 80, 80, 72, 68.4, 71.8]

१०. गेहूं के निम्नलिखित थोक मूल्य सूचकांक वर्ष २००५ के आधार पर आधारित है:

Year	2005	2006	2007	2008	2009
Index no.	100	108	120	150	210

आधार को वर्ष २००७ पर परिवर्तन कर नये सूचकांक ज्ञात कीजिए।

[उत्तरः- (83.3, 90, 100, 125, 175]

११. वर्ष २००१ को आधार मानकर निम्नांकित समंकों से वास्तविक आय सूचकांक ज्ञात कीजिए:

Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
income (in Rs.)	3600	4200	5000	5500	6000	6400	6800	7200	7500
general price Index Numbers	100	104	115	160	250	290	300	320	330

१२. निम्नांकित सूचकांक श्रेणी से सूचकांक ज्ञात कीजिए (i) वर्ष २००५ को आधार मानकर (ii)वर्ष २००६ को आधार मानकर

Year	Series X	Series Y	Series Z
2003	100	-	-
2004	280	-	-
2005	200	100	-
2006	-	150	100
2007	-	-	140
2008	-	-	150
2009	-	-	160

[उत्तर (i) 50, 140, 100, 150, 210, 225, 240
(ii) 33.33, 93.33, 66.67, 100, 140, 150, 160]

वर्ग (Section) D

अध्याय (Chapter) 2

काल श्रेणी का विश्लेषण

(Analysis of Time Series)

१. काल श्रेणी का अर्थ

२. काल श्रेणी की परिभाषाएं

३. काल श्रेणी के संघटक (अंग)

४. अल्पकालीन उच्चावचनों के प्रकार

५. काल श्रेणी का विश्लेषण

६. काल श्रेणी निदर्श

७. काल श्रेणी के विश्लेषण से पूर्व आवश्यक समायोजन

८. सुदीर्घ कालीन प्रवृत्ति का मापन

९. दीर्घकालीन प्रवृत्ति के उपयोग

१०. दीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापन की विधियां:

११. न्यूनतम वर्ग विधि

१२. न्यूनतम वर्ग विधि की मान्यताए

१३. व्यवसाय में काल श्रेणी का अनुप्रयोग

१४. अभ्यासार्थ प्रश्न

वर्ग (Section) D
अध्याय (Chapter) 2
काल श्रेणी का विश्लेषण
(Analysis of Time Series)

काल श्रेणी का अर्थ
(Meaning of Time Series)

जब समंको को उनके घटित होने के समय के अनुसार व्यवस्थित किया जाता है तो इससे बनने वाली सांख्यिकीय श्रेणी को काल श्रेणी कहा जाता है। इस श्रेणी में समय की इकाई को स्वतन्त्र चर तथा समय के लिए जो चर दिये हुए होते हैं उन्हें आश्रित चर कहा जाता है। वर्ष, माह, पखवाड़ा सप्ताह, दिन, घण्टा मिनिट या सैकण्ड को समय की इकाई के रूप में मान जाता है।

काल श्रेणी की परिभाषाएं
(Definitions of Time Series)

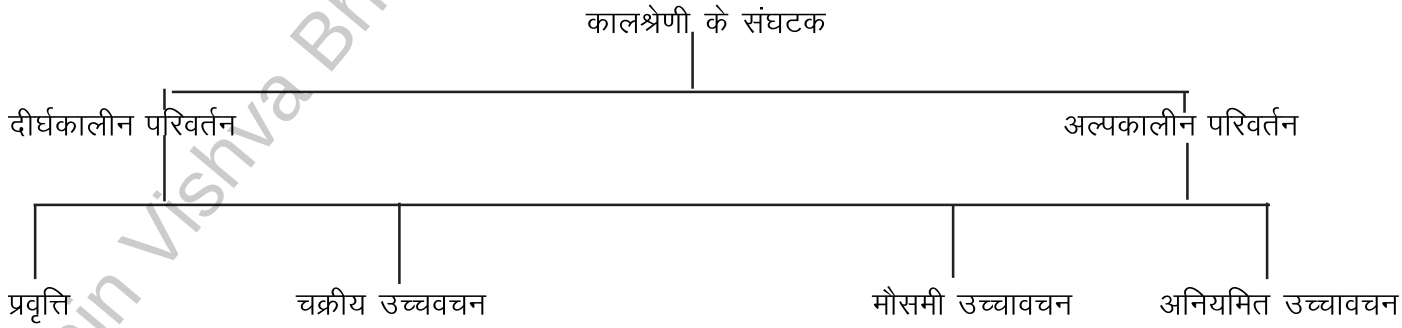
क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार समय के किसी माप के आधार पर प्रस्तुत समंको के व्यवस्थित क्रम को काल श्रेणी कहा जाता है।

लुन-चाऊ के शब्दों में एक काल श्रेणी को किसी आर्थिक चर या मिश्रित चरों, जिनका संबंध विभिन्न समयावधियों से होता है, के अवलोकनों से संग्रहण के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

उपयुर्क्त परिभाषाओं के आधार पर यह निष्कर्ष निकलता है कि समय के आधार पर आधारित समंक मालाएं काल श्रेणी कहलाती हैं। काल श्रेणी में प्रत्येक चर समयानुसार प्रदर्शित किया जाता है इसलिए यह व्यक्तिगत श्रेणी के रूप में ही होती है।

काल श्रेणी के संघटक (अंग)
(Components of Time Series)

काल श्रेणी के चरों में जिन कारणों से परिवर्तन होता है, उन्हें काल-श्रेणी के संघटक कहा जाता है। काल श्रेणी के समंक विभिन्न परिवर्तनों के परिणाम होते हैं तथा इन परिवर्तनों को ही काल श्रेणी के संघटक कहा जा सकता है। इन संघटकों को मुख्य रूप से निम्न वर्गों में बांटा जा सकता है।



अत: काल श्रेणी के निम्नलिखित संघटक होते है:

१) नियमित परिवर्तन (Regular Fluctuations)

(अ) सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनत्ति (Long term or Secular Trend) [T]

(ब) अल्कालीन उच्चावचन (Short-term Fluctuations)

(i) मौसमी उच्चावचन (Seasonal Fluctuations) [S]

(ii) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations) [C]

२) अनियमित उच्चावचन (Irrelugur Fluctuations) [I]

३.१) दीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनत्ति (Secular Trend) [T]

किसी भी काल श्रेणी में दीर्घकाल में वृद्धि, कमी या स्थिरता की स्वाभाविक प्रवृत्ति को उपनत्ति कहा जाता है। इसे अंग्रेजी के अक्षर T से प्रदर्शित किया जाता है। प्रवृत्ति सदैव दीर्घकाल में एक ही दिशा में होती है- वृद्धि की प्रवृत्ति वृद्धि तत्व (Growth factor) की उपस्थिति के कारण होती है तथा कमी की प्रवृत्ति ह्रास तत्त्व (Decline Factor) के कारण होती है। एक काल में दोनों प्रवृत्तियाँ एक साथ प्रकट नहीं हो सकती है। उपनत्ति अल्पकालीन परिवर्तनों को ध्यान में नहीं रखती हैं।

३.२) **अल्कालीन उच्चावचन (Short-term Fluctuations)**

काल श्रेणी में अल्पकाल में जो उतार-चढाव होते रहते हैं उन्हें अल्पकालीन उच्चावचन कहते हैं। श्रेणी के मूल समको में से दीर्घकालीन उच्चावचनों को हटा देने के बाद जो कुछ बचता है, वही अल्पकालीन उच्चावचन होता है।

a) योगात्मक निदर्श (Additive model) की दशा में

अल्पकालीन उच्चावचन =मूल समंक-उपनति

Short-term Fluctuations= Original data-Trend

b) गुणात्मक निदर्श (Multiplicative Model) की दशा में :

अल्पकालीन उच्चावचन =मूल समंक÷उपनति =Orginal data÷Trend = O/T

अल्पकालीन उच्चावचनों के प्रकार:-

(Types of Short- term fluctuations):

अल्पकालीन उच्चावचन दो प्रकार के होते है।

(i) मौसमी उच्चावचन एवं (ii) चक्रीय उच्चावचन

मौसमी उच्चावचन (Seasonal Fluctuations) [S]

यह नियमित प्रकृति के प्रतिवर्ष घटित होने वाले ऐसे उच्चावचन होते है जो मौसम (Weather) या समाज के व्यक्तियों की आदत, प्रचलन, रीतिरिवाज एवं परम्पराओं के कारण उत्पन्न होते हैं। जैसे- जेवरात एवं गहनों की बिक्री शादी के मौसम में बढ़ जाती है तथा अन्य मौसम में घट जाती है। मौसमी उच्चावचनों का सही पूर्वानुमान लगाया जा सकता है क्योंकि इन परिवर्तनों की प्रतिवर्ष पुनरावृत्ति होती रहती है।

चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations) [C]

समंकों में दीर्घकाल में नियमित रूप से उतार एवं चढ़ाव होने की प्रवृति को चक्रीय उच्चावचन कहते हैं ।यह काल श्रेणी के चरों में एक वर्ष से अधिक की अवधि में होने वाले परिवर्तन होते हैं जो व्यावसायिक चक्र (Business Cycle) का परिणाम हैं। व्यावसायिक चक्रों की क्रमानुसार चार अवस्थाएं होती हैं- समृद्धि (Prosperity) प्रतिसार (Recession), अवसाद (Depression) तथा पुनरूत्थान (Recovery)। सम्पूर्ण व्यावसायिक चक्र की अवधि सामान्यत: ५ से ९ वर्ष होती है जो समृद्धि से लेकर अगली समृद्धि तक की अवधि होती है।

अनियमित उच्चावचन (Irregular Fluctuations) [I]

किसी काल श्रेणी में ऐसे परिवर्तन जो किसी निश्चित क्रम में नहीं होते, जिनका पूर्वानुमान नहीं लगाया जा सकता तथा जो पूर्ण रूप से दैवयोग (at random) से उत्पन्न होते हैं, अनियमित उच्चावचन कहलाते हैं। ऐसे परिवर्तन किसी क्रम में नहीं होते हैं तथा इनके घटित होने की कोई निश्चित समयावधि नहीं होती हैं।

काल श्रेणी का विश्लेषण
(Analysis of Time Series)

किसी काल श्रेणी के विभिन्न संघटकों को अलग-अलग करने की प्रक्रिया को काल श्रेणी का विश्लेषण कहा जाता है। काल श्रेणी के विश्लेषण में काल श्रेणी के चारों संघटकों को अलग-अलग किये जाने का प्रयास किया जाता है क्योंकि काल श्रेणी इन चारों संघटकों-प्रवृत्ति, मौसमी विचरण, चक्रीय उच्चावचन एवं अनियमित परिवर्तनों का सम्मिश्रण होती हैं।

काल श्रेणी निदर्श
(Time Series Models or Theorems)

काल श्रेणी के अवलोकित मूल्यों की उत्पत्ति चारों संघटकों की एक निश्चित तरीके से अर्न्तव्यवहार के कारण होती है। काल श्रेणी का पता लगाने की विशेष विधि को काल श्रेणी निदर्श कहा जाता है। काल श्रेणी निदर्श दो प्रकार के होते हैं-

(i) योज्य या योगाात्मक निदर्श (Additive Model)

(ii) गुणात्मक निदर्श (Multiplicative Model)

योज्य या योगात्मक निदर्श (Additive Model):

इसकी आधारभूत मान्यता यह है कि मूल समंक (O) चारों संघटकों का योग होता है। अर्थात-

$$(O = T+S+C+I)$$

अल्पकालीन उच्चावचन $= O-T = S+C+I$ या $O-T-S = C+I$

जहांकि:

O= काल श्रेणी का मूल चर (Original Variable)

T= सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Secular Trend)

S= मौसमी विचरण (Seasonal Variations)

C= चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)

I= अनियमित उच्चावचन (Irregular Fluctuations)

(ii) गुणात्मक निदर्श (Multiplicatine Model)

इस निदर्श की मान्यता के अनुसार काल श्रेणी का मूल समंक (O) चारों संघटकों का गुणनफल होता है। अर्थात्

$$O = T \times S \times C \times I$$

अल्पकालीन विचरण $= O/T = SCI$

नोट: अर्थशास्त्र एवं व्यवसाय से संबंधित अधिकतर काल श्रेणियां गुणात्मक निदर्श के आधार पर बनी हुई होती हैं। व्यवहार में योज्य निदर्श का उपयोग बहुत कम होता है।

काल श्रेणी के विश्लेषण से पूर्व आवश्यक समायोजन

(Adjustments Required Before Analysis of Time Series) :

जब समंको में एकरूपता न हो तो उन्हे तुलनायोग्य बनाने के लिए कुछ प्रारम्भिक समयोजन करना आवश्यक होता है। काल श्रेणी के विश्लेषण से पूर्व निम्नलिखित का समयोजन करना आवश्यक होता है:-

(i) तिथियों में विचरणों के लिए समायोजन

(ii) जनसंख्या में परिवर्तनों के लिए समायोजन

(iii) मूल्यों में परिवर्तनों के लिए समायोजन

(iv) अन्य समायोजन

तिथियों में विचरणो के लिए समायोजन

(Adjustments for calender Variations) :

प्रत्येक माह में कार्यशील दिवसों की संख्या बराबर नहीं रहती है। यह माह के दिनों, विशेष छुटियों, हड़ताल आदि के कारण प्रभावित होती है। माह के दिनों में ऐसे अन्तर को कलेण्डर विचरण कहा जाता है। काल श्रेणी का विश्लेषण करने से पूर्व कलेण्डर विचरण का समायोजन करना आवश्यक होता है। इसके लिए संबंधित मासिक समंको में उस मास के वास्तविक कार्यशील दिवसों का भाग देकर दैनिक औसत समंक ज्ञात किये जाते हैं। इन औसत समंको को उस वर्ष के दिनों की संख्या से गुणा करके १२ का भाग दिया जाता है जिससे समयोजित मासिक समंक प्राप्त हो जाते हैं। इन समायोजित समंको के आधार पर काल श्रेणी का विश्लेषण किया जाता है।

(अ) $\text{समंको का दैनिक औसत} = \dfrac{\text{वास्तविक मासिक समंक}}{\text{उस माह में कार्यशील दिवसों की वास्तविक संख्या}}$

(ब) $\text{समायोजित मासिक समंक} = \dfrac{\text{औसत दैनिक समंक X वर्ष में दिनों की कुल संख्या}}{१२}$

जनसंख्या में परिवर्तनों के लिए समायोजन

(Adjustments for Population Changes) :

जनसंख्या के आकार में परिवर्तन का काल श्रेणी के समंको पर प्रभाव पड़ता है। मांग, पूर्ति, उपभोग, उत्पादन, आय, व्यय आदि से संबंधित समंक जनसंख्या में परिवर्तन से प्रभावित होते हैं। निरपेक्ष समंको के आधार पर काल श्रेणी का विश्लेषण करना उचित नहीं होता है। सापेक्ष समंक जैसे-प्रतिव्यक्ति आय (Per Capita Income) के आधार पर काल श्रेणी का विश्लेषण करना उचित होता है।

मूल्यो में परिवर्तन के लिए समायोजन

(Adjustments for Price Changes) :

निरपेक्ष समंक मूल्यों में परिवर्तन से प्रभावित रहते हैं। काल श्रेणी का विश्लेषण करने के लिए समकों की अपस्फति (Deflation of Data) करना आवश्यक है। इसके लिए मौद्रिक मूल्यों में उपयुक्त मूल्य

सूचकांक का भाग देकर वास्तविक समंक ज्ञात किये जाते हैं। इन वास्तविक समंको के आधार पर काल श्रेणी का विश्लेषण किया जाना उचित है।

अन्य समायोजन

(Other Adjustments) :

उपयुर्क्त समायोजनों के अलावा कई अन्य बातों के लिए भी समंको में समायोजन किया जाना आवश्यक है। उदाहरण के लिए, समंको के संकलन की विधि, समंको की इकाई, परिभाषा, भौगोलिक दशाओं में अन्तर आदि में सजातीयता लाने के लिए आंकड़ों में समायोजन कर लेना चाहिए। इन सभी समायोजनों के बाद ही काल–श्रेणी विश्लेषण के योग्य होती है।

सुदीर्घ कालीन प्रवृत्ति का मापन

(Measurement of Secular Trend)

सुदीर्घ कालीन प्रवृत्ति एक श्रेणी में दीर्घकाल में एक ही दिशा में लगातार वृद्धि, कमी या स्थिरता को प्रदर्शित करती है। यदि अल्पकालीन उच्चावचनों के प्रभाव को हटा दिया जावे तो संबंधित आंकड़े प्रवृत्ति को प्रदर्शित करते हैं।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति के उपयोग

(Uses of Secular Trend) :

किसी काल श्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृत्ति का निर्धारण निम्नांकित उद्देश्यों के लिए किया जाता है:–

i) समंको की प्रवृत्ति को जानने हेतु;

ii) अल्पकालीन उच्चावचनों को जानने हेतु।

समंको की प्रवृत्ति को जानने हेतुः दीर्घकालीन प्रवृत्ति को ज्ञात करने का मुख्य उद्देश्य वृद्धि की दिशा का पता लगाना होता है– अर्थात् वृद्धि घनात्मक है या ऋणात्मक। इससे एक उद्योग में हुई वृद्धि की तुलना अन्य उद्योगों में हुई वृद्धि से की जा सकती है। इससे भावी समंको का अनुमान लगाने में भी सहायता मिलती है।

अल्पकालीन उच्चावचनों को जानने हेतुः दीर्घकालीन प्रवृत्ति को ज्ञात करने का दूसरा उद्देश्य मूल समंको में सम्मिलित अल्पकालीन विचरणों का पता लगाना है। यह समंक श्रेणी के प्रतिरूप पर निर्भर करता है कि दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मूल समंक में से किस प्रकार हटा कर अल्पकालीन विचरण ज्ञात किये जावें। योग्यात्मक प्रतिरूप में मूल समंक में से दीर्घकालीन प्रवृत्ति को घटाकर अल्पकालीन विचरण ज्ञात किये जाते हैं। जबकि गुणात्मक प्रतिरूप में मूल समंक में प्रवृत्ति का भाग देकर अल्पकालीन विचरण ज्ञात किये जाते हैं।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापन की विधियां:

(Methods for Measurement of Secular Trend) :

प्रवृत्ति के मापन के लिए निम्नलिखित महत्वपूर्ण विधियाँ है:

i) मुक्त हस्त वक्र विधि (Free Hand Curve Method)

ii) अर्द्ध माध्य विधि (Semi Averages Method)

iii) चल माध्य विधि (Moving Averages Method)

iv) न्यूनतम वर्ग विधि (Method of Least squares)

मुक्त हस्त वक्र विधि (Free Hand Curve Method)

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापन हेतु यह सबसे सरल विधि है। इस विधि के अन्तर्गत समय श्रेणी के आंकड़ों को एक रेखाचित्र (Graph) पर प्रदर्शित किया जाता है। एक उचित पैमाना लेते हुए समय इकाई को

x–अक्ष पर तथा दिये हुए चर मूल्यों को Y अक्ष पर दिखाया जाता है। इसके पश्चात् उच्चावचनों को ध्यान में रखते हुए मुक्त हस्त से एक ऐसा वक्र बनाया जाता है जो इन उच्चावचनों के मध्य से होता हुआ गुजरे। यह वक्र ही मुक्त–हस्त प्रवृत्ति वक्र कहलाता है जो अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर करके प्रवृति को प्रदर्शित करता है। यह वक्र निरीक्षण (inspection) द्वारा खींचा जाता है। इसलिए इस विधि को निरीक्षण द्वारा वक्र विधि भी कहा जाता है।

सामान्यत: वक्र मुक्त हस्त से खींचा जाता है। जो सीधी रेखा के रूप में भी सकता है। इसके लिए पैमाना, रेखा संबंधित नियम आदि को भी ध्यान में रखा जा सकता है। यह ध्यान में रखने की बात है कि खींचा गया वक्र सरलित वक्र (Smooth Curve) हो तथा प्रवृति रेखा के ऊपर एवं नीचे बराबर संख्या में बिन्दू (Dots) हो। इस विधि से खींची गयी प्रवृत्ति रेखा या प्रवृत्ति को भविष्य के मूल्यों का पूर्वानुमान लगाने के लिए काम में लिया जा सकता है। इस विधि में वक्र रेखा का स्वरूप बनाने वाले व्यक्ति पर निर्भर करता है इसीलिए प्राप्त प्रवृत्ति पक्षपात की भावना से प्रभावित होती है। अत: जहां शुद्धता की अधिक आवश्यकता है वहां प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए इस विधि का उपयोग नहीं किया जाना चाहिए।

उदाहरण (Illustration)१ :–

निम्नलिखित समंक किसी कम्पनी के उत्पादन लागत से संबंधित है।

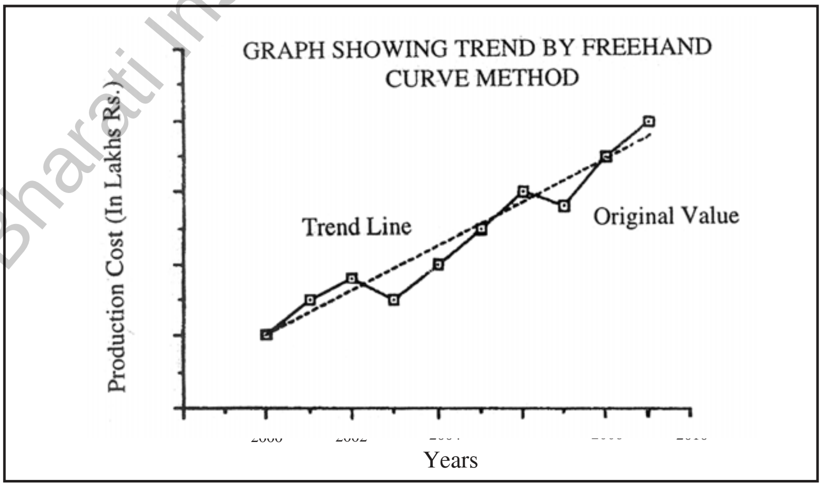
The following data are related to production cost of a company:

Years	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Porduction cost (in Lakh of Rs.)	20	30	36	30	40	50	60	56	70	80

मुक्त हस्त विधि से एक प्रवृत्ति रेखा का निर्माण कीजिए।

Fit a trend line by freehand curve Method:

Solution



अर्द्ध माध्य विधि (SEMI- AVERAGE METHOD) :

श्रेणी के प्रत्येक आधे भाग (पूर्वार्द्ध एवं उत्तरार्द्ध) के समान्तर माध्य को अर्द्ध माध्य कहा जाता है। अर्द्ध माध्यों के द्वारा प्रवृति के निर्धारण हेतु निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती है।

अ) काल श्रेणी के चर मूल्यों को दो बराबर भागों में बांटा जावे। यदि कुल चरों की संख्या विषम (Odd) हो,

अर्थात् ५,७,९,११,१५ आदि हो तो मध्यम मूल्य को छोड़ दिया जाता है। जैसे यदि काल श्रेणी में १५ चर हों तो बीच के ८ वें चर को छोड़ दिया जाता है तथा पहले आधे भाग (पूर्वाद्ध) में एक से सात तक के सात चर सम्मिलित किये जावेंगे तथा दूसरे आधे भाग (उत्तरार्द्ध) में ९ से १५ तक के सात चर सम्मिलित होगें।

ब) दोनों भागों के अलग-अलग समान्तर माध्य ज्ञात किये जावें।

स) उपयुर्क्त समान्तर माध्य श्रेणी के संबंधित अर्द्ध भाग के मध्यका वर्ष की प्रवृत्ति को प्रदर्शित करते हैं। जैसे श्रेणी में कुल १५ चर होने पर प्रथम अर्द्ध समान्तर माध्य चौथे वर्ष की उपनति को तथा द्वितीय अर्द्ध समान्तर माध्य १२ वे वर्ष की उपनति को प्रदर्शित करेगा।

द) रेखा चित्र पर दोनों अर्द्ध माध्यों को संबंधित मध्यका वर्ष के लिए दो बिन्दुओं के रूप में अंकित किया जाता है।

य) दोनों माध्य बिन्दुओं को एक सरल रेखा द्वारा मिला दिया जाता है। यही रेखा अर्द्ध माध्य विधि द्वारा प्राप्त प्रवृत्ति रेखा होती है।

र) भविष्य की समयावधि के लिए प्रवृत्ति का निर्धारण करने हेतु इस प्रवृत्ति रेखा को आगे बढ़ा दिया जाता है।

उदाहरण (Illustration) - 2 :

अर्द्ध माध्य विधि से प्रवृत्ति को दिखाते हुए निम्नांकित समंको को रेखाचित्र पर प्रदर्शित कीजिए:-

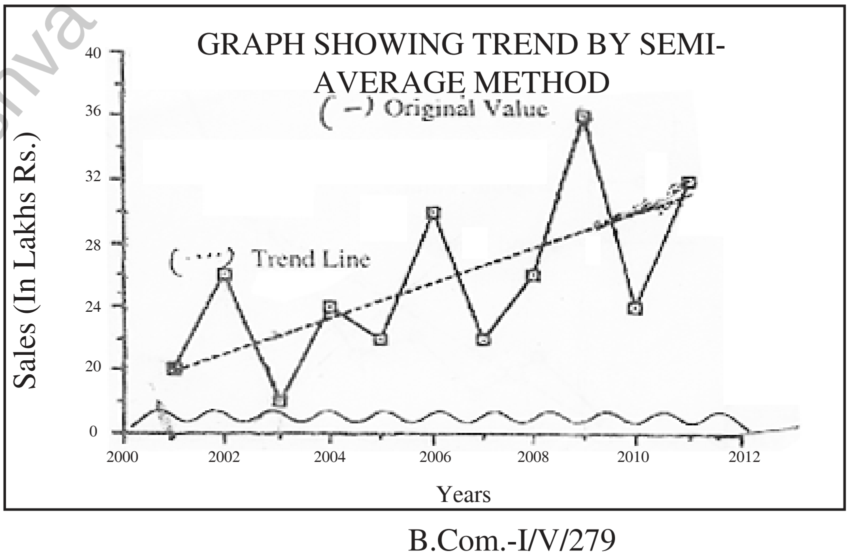
Plot the following data on graph paper showing the trends by semi-averages method

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
बिक्री (लाख रूपयों में)	20	26	18	24	22	30	22	26	36	24	32

हल (Solution) :-

अर्द्ध माध्य विधि से प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

	प्रथम अर्द्ध भाग	द्वितीय अर्द्ध भाग
i) वर्ष	२००० से २००४ तक	२००६ से २०१० तक
ii) अर्द्ध माध्य (प्रवृत्ति मूल्य)	$\frac{20+26+18+24+22}{5} = \frac{110}{5} = 22$	$\frac{22+26+36+24+32}{5} = \frac{140}{5} = 28$
iii) मध्यका वर्ष	2002 (प्रथम अर्द्धभाग का तीसरा वर्ष)	2008 (द्वितीय अर्द्धभाग का तीसरा वर्ष)



अतः वर्ष २००२ का प्रवृत्ति मूल्य २२ है तथा वर्ष २००८ का २८। प्रवृत्ति मूल्यों को संबंधित मध्यका वर्षों के सामने अंकित कर दोनों बिन्दुओं को जोड़ते हुए प्रवृत्ति रेखा खींची गयी है।

उदाहरण(Illustration) - 3

निम्नांकित समंकों से अर्द्ध माध्य विधि द्वारा एक प्रवृत्ति रेखा बनाए:-

Draw a trend line by the method of Semi-averages from the following data :

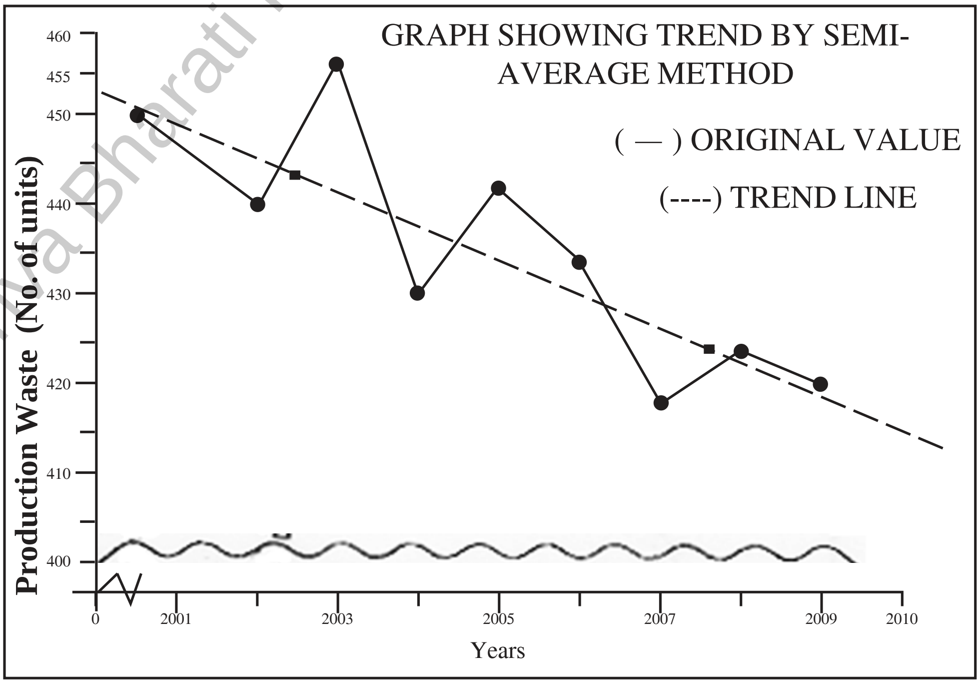
Years वर्ष	Production Waste (No. of units)	Years वर्ष	Production Waste (No. of units)
2001	450	2006	434
2002	440	2007	418
2003	456	2008	424
2004	430	2009	420
2005	442		

हल **Solution:**

अर्द्ध माध्यों की गणना

	प्रथम अर्द्धभाग	द्वितीय अर्द्धभाग
वर्ष	प्रथम चार वर्ष २००१ से २००४ तक	अन्तिम चार वर्ष २००६ से २००९ तक
अर्द्ध माध्य(प्रवृत्ति मूल्य)	$\frac{450+440+456+430}{4} = \frac{1776}{4} = 444$	$\frac{434+418+424+420}{4} = \frac{1696}{4} = 424$
मध्य का वर्ष	वर्ष 2002-03 बीच का	वर्ष 2007-08 बीच का

दोनों मध्यका वर्षों के अर्द्ध माध्यों को ग्राफ पर अंकित किया गया है। इन दोनों बिन्दुओं को जोड़कर एक प्रवृत्ति रेखा निम्न ग्राफ पर खींची गयी है:-



चल- माध्य विधि (Moving Averages Method)

चल माध्य विधि अल्पकालीन उच्चावचनों को दूर करके काल श्रेणी की दीर्घकालीन प्रवृत्ति को दिखाये जाने की एक सरल विधि है। इस विधि के अन्तर्गत प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए सबसे पहल चल माध्य की अवधि निर्धारित की जाती है जो कि व्यावसायिक चक्र (Business Cycle) की अविध पर निर्भर करती है। यह अविध सम (Even) या विषम हो सकती है। चल माध्य की अवधि जितनी अधिक होगी अल्पकालीन उतार-चढ़ाव उतने ही कम या समाप्त हो जायेगें।

विषम समयावधि के लिए चल माध्यों की गणना प्रक्रियाः

(Procedure for Computation of moving averages of odd time periods:)

i) चल माध्य की समयावधि का निर्धारण किया जावे। यह ३,५,७ या अन्य विषम संख्या के वर्ष या माह हो सकती है। माना कि यह समयावधि ५ वर्ष है।

ii) प्रथम पांच वर्षों के चर मूल्यों के योग तथा उनका समान्तर माध्य मध्यका वर्ष ३ के सामने लिखा जावें।

iii) इसके बाद प्रथम वर्ष के चर मूल्य को छोड़कर अगले पांच वर्षों के मूल्यों का योग तथा समान्तर माध्य चौथे वर्ष के सामने लिखा जावे।

iv) इसके बाद दूसरे वर्ष के चर मूल्य को छोड़कर अगले ५ वर्षों (३ से ७ वर्ष तक) के मूल्यों का योग तथा समान्तर माध्य पांचवें वर्ष के सामने लिखा जावे। यह क्रिया तब तक करेंगे जब तक श्रेणी का अन्तिम मूल्य चल योग में सम्मिलित न हो जावे।

उपयुर्क्त प्रकार से निकाले गये समान्तर माध्य ही चल माध्य होते हैं और इन चल माध्यों को ही संबन्धित मध्यका वर्ष का प्रवृत्ति मूल्य कहा जाता है। ५ वर्षीय चल माध्य की दशा में प्रथम दो वर्षों तथा अन्तिम दो वर्षों के चल माध्य निर्धारित नहीं किये जा सकते हैं। यदि ३ वर्षीय चल माध्य ज्ञात करना हो तो प्रथम एवं अन्तिम वर्ष के लिए चल माध्य निर्धारित नहीं किये जा सकते हैं।

नोट- चल माध्यों को ही प्रवृत्ति मूल्य माना जाता है।

उदाहरण (Illustration) - 4

निम्नलिखित समंको से ५ वर्षीय चल माध्यों को लेते हुए प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिएः-

Find out trend values by taking 5 yearly moving averages from the following data:

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
बिक्री (१००० इकाइयों में)	220	240	210	190	170	200	180	160	130	140

हल (**Solution:**)

५ वर्षीय चल माध्यों के आधार पर प्रवृत्ति मूल्यों का निर्धारण

Years	Sales (1000 units)	5 Yearly Moving Totals	5 Yearly Moving Averages (T)
2000	220	-	-
2001	240	-	-
2002	210	1030	206
2003	190	1010	202
2004	170	950	190
2005	200	900	180
2006	180	840	168
2007	160	810	162
2008	130	-	-
2009	140	-	-

सम समयावधि के लिए चल माध्यों की गणन प्रक्रिया (Procedure for Computation of Moving Averages of Even number of period)

यदि व्यावसायिक चक्र की अवधि सम वर्षों जैसे २, ४ ,६, ८ आदि हो तो चल माध्यों से प्रवृत्ति मूल्यों के निर्धारण हेतु निम्न प्रक्रिया अपनायी जाती है।

i) यदि चार-वर्षीय चल माध्य ज्ञात करने हों तो प्रथम चार वर्षों के चर मूल्यों का योग द्वितीय तथा तृतीय वर्ष के मध्य लिखा जावे। इसके पश्चात् पहले मूल्य को छोड़कर अगले चार वर्षों का योग तृतीय एवं चतुर्थ वर्ष के मध्य लिखा जावे। इस प्रकार अन्तिम चर मूल्य को सम्मिलित करने तक यह प्रक्रिया अपनायी जावे।

ii) इसके पश्चात् चार वर्षीय योगों का केन्द्रीयकरण किया जावे। इसके लिए जो ४ वर्षीय योग दूसरे एवं तीसरे वर्ष के बीच तथा तीसरे एवं चौथे वर्ष के बीच हैं उन्हें जोड़कर तीसरे वर्ष के सामने लिखा जावे। इसी प्रकार जो ४ वर्षीय योग तीसरे एवं चौथे तथा चौथे एवं पांचवे वर्ष के बीच लिखे हुए हैं, उन्हें चौथे वर्ष के सामने लिखा जावे। अन्तिम चार वर्षीय योग को युग्ल योग में सम्मिलित करने तक यह युग्ल योग प्रक्रिया जारी रखी जावे।

iii) युग्ल योग ८ वर्षों के चर मूल्यों का योग होता है। अत: युग्ल योग में ८ का भाग देकर चार वर्षीय चल माध्य ज्ञात किये जाते हैं।

उदाहरण (Illustration) - 5

निम्नाकित आंकड़ों से ४ वर्षीय चल माध्यों के आधार प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए:-

Find out trend values by taking 4 yearly moving averages from the following data:

Years	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Production (in tonnes)	464	515	518	467	502	540	557	571	586	612

हल Solution :

चार वर्षीय चल –माध्यों की गणना

वर्ष (i)	उत्पादन (टन) (ii)	४ वर्षीय चल योग (iii)	चल योगों का केन्द्रीयकरण (iv)	४ वर्षीय चल माध्य स्तम्भ iv/8 (प्रवृत्ति मूल्य) (v)
2000	464	-	-	-
2001	515	-	-	-
2002	518	1964	3966	495.75
2003	467	2002	4029	503.63
2004	502	2027	4093	511.63
2005	540	2066	4236	529.50
2006	557	2170	4424	553.00
2007	571	2254	4580	572.50
2008	586	2326	-	-
2009	612	-	-	-

न्यूनतम वर्ग विधि
(Method of Least Squares)

प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए न्यूनतम वर्ग विधि एक गणितीय विधि है। इस विधि के अन्तर्गत गणितीय समीकरणों की सहायता से एक प्रवृत्ति रेखा खींची जाती है। इस रेखा को सर्वोत्तम उपयुक्त रेखा (Line of best fit) भी कहा जाता है। प्रवृत्ति रेखा या तो एक सीधी रेखा के रूप में हो सकती है अथवा एक वक्र (Parabolic Curve) के रूप में।

न्यूनतम वर्ग विधि की मान्यताएं
(Assumptions of the least squares method) :

न्यूनतम वर्ग विधि निम्नलिखित दो मान्यताओं पर आधारित है:

i) आंकलित प्रवृत्ति मूल्य (Computed Trend Values) तथा मूल समंकों के विचलनों का योग शून्य होता है।

अर्थात् $\boxed{\sum(Y-Yc)=0}$

जहां कि Y= मूल समंक
तथा Yc= आंकलित प्रवृति मूल्य।

ii) आंकलित प्रवृति मूल्यों तथा मूल समंको के विचलनों के वर्गों का योग अन्य किसी आधार पर ज्ञात विचलनें के वर्गों के योग से कम होता है।

अर्थात् $\boxed{\sum(Y-Yc)^2= \text{न्यूनतम}}$

सरल रेखीय प्रवृत्ति अन्वायोजन
(Fitting a straight Line Trend) :

न्यूनतम वर्ग विधि के द्वारा सरल रेखीय प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए निम्न आधारभूत समीकरण का प्रयोग किया जाता है।

$$\boxed{(Yc=a+b\ x)}$$

जहां कि : Yc= उपनति मूल्य जिसकी गणना की जानी है।

a= स्थिरांक, जिसकी गणना की जानी है। जब समय इकाई को शून्य माना जावे तो परिकलित प्रवृत्ति मूल्य को a कहा जाता है। a वह मूल्य होता है जहां से रेखाचित्र पर प्रवृत्ति रेखा प्रारम्भ होती है। इसे प्रवृत्ति रेखा का प्रारम्भिक बिन्दु (intercept of trend value) भी कहा जाता है।

b=स्थिरांक, जिसकी गणना की जानी है। यह प्रवृत्ति रेखा के ढलान (Slope) को इंगित करता है। समयाअवधि में इकाई परिवर्तन होने पर प्रवृत्ति मूल्य (Yc) में होने वाले परिवर्तन की मात्रा को b द्वारा इंगित किया जाता है।

उपरोक्त a तथा b स्थिरांकों की गणना निम्नाकित दो समीकरणों को हल करके की जाती है।

$$\sum Y = Na + b\sum X \quad \text{———— (i)}$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \quad \text{———— (ii)}$$

जहां कि:- N = काल श्रेणी में दी गयी अवधियों की संख्या

$\sum X$ = समय इकाई मूल्यों का योग

$\sum Y$ = काल श्रेणी में दिये गये मूल समंको का योग

$\sum X^2$ = समय इकाई मूल्यों के वर्गों का योग

$\sum XY$ = समय इकाई मूल्य तथा तत्संबन्धित मूल समंक के गुणनफलों का योग ।

प्रवृत्ति मूल्य की गणना निम्न समीकरण में समय इकाई (X) का मान प्रतिस्थापित करके किया जाता है:

$$\boxed{Yc = a+bx}$$

समय इकाई x की गणना निम्नांकित दो विधियों से की जा सकती है:

i) काल श्रेणी के प्रथम वर्ष को मूल वर्ष मानकर अर्थात् दीर्घ या प्रत्यक्ष विधि; तथा

ii) काल श्रेणी के मध्यका वर्ष (Median Year) को मूल वर्ष मानकर अर्थात् लघु विधि।

उदाहरण (Illustration) - 6

निम्नांकित समंको से एक सरल प्रवृत्ति रेखा का निर्धारण कर इसे रेखाचित्र पर इंगित कीजिए तथा वर्ष २०१० के प्रत्याशित मूल्यों की गणना कीजिए:-

Fit a straight line from the following data and plot it on the graph Compute the estimated value for the year 2010.

वर्ष	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
स्कूटर पंजीयन संख्या	160	350	340	580	770	910	950

हल (Solution)

२००३ वर्ष को मूल वर्ष मानकर प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

Calculation of Trend Values (Taking the year 2003 as origin)

वर्ष	पंजीयत स्कूटर संख्या Y	X	X^2	XY	परिकलित प्रवृत्ति मूल्य Yc= 160+140X
2003	160	0	0	0	160+140 x 0= 160
2004	350	1	1	350	160+140 x 1= 300
2005	340	2	4	680	160+140 x 2= 440
2006	580	3	9	1740	160+140 x 3= 580
2007	770	4	16	3080	160+140 x 4= 720
2008	910	5	25	4550	160+140 x 5= 860
2009	950	6	36	5700	160+140 x 6= 1000
N= 7	**4060**$\sum y$	**21**$\sum x$	**91**$\sum x^2$	**16100**$\sum xy$	**4060**$\sum y_C$

प्रवृत्ति मूल्य समीकरण : Yc= a+bx

स्थिरांक **a** तथा **b** का निर्धारण निम्नांकित दो समीकरणों के हल के आधार पर किया जा सकता है:

$\sum Y = Na + b\sum X$ ———— (i)

$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$ ———— (ii)

परिकलित मूल्यों को उपयुर्क्त समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर :-

4060 = 7a+21b ———— (i)

16100 = 21a+91b ———— (ii)

समीकरण (i) को ३ से गुणा करके उसे समीकरण (ii) में से घटाने पर:

21a+91b = 16100 (ii)

-21a+63b = -12180 (iii)

-28b = 3920

or $b = \frac{3920}{28} = 140$

b का मान समीकरण (i) में रखने पर

7a+(21 x 140) = 4060; or 7a = 4060- 2940

or, 7a = 1120 or $a = \frac{1120}{7} = 160$

अत: प्रवृत्ति मूल्य समीकरण निम्न रूप में होगा:-

$\boxed{Yc = 160 + 140\ X}$

प्रवृत्ति मूल्यों की गणना (Computation of Trend Values) :

प्रवृति मूल्यों की गणना करने हेतु समयावधि को निम्नांकित समीकरण के आधार पर 'X' में बदला जावेगा:

X= समयावधि (वर्षों में) - 2003 (मूल वर्ष)

मूल वर्ष 2003 के लिए 'X' का मान शून्य होगा।

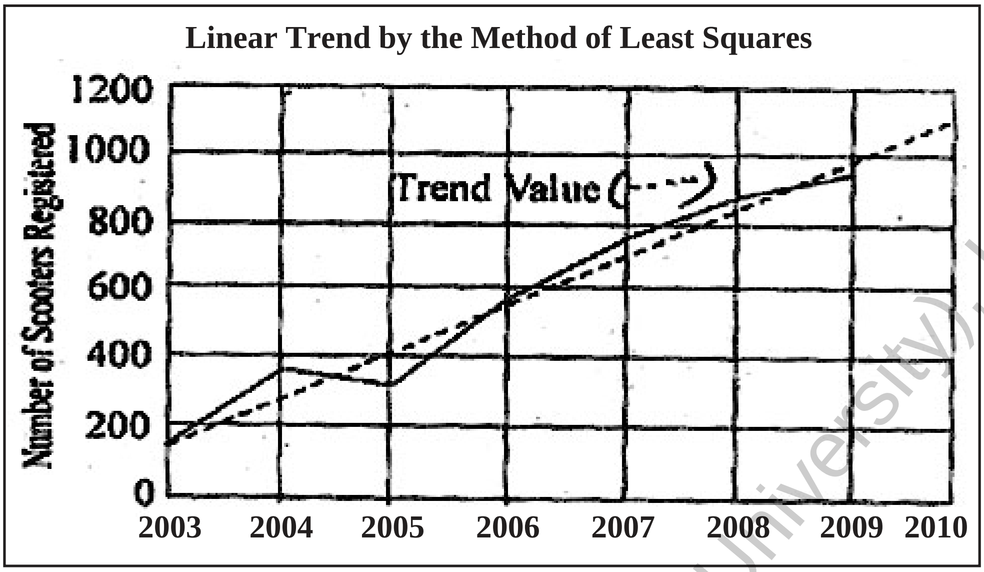
वर्ष 2003, X= 0, प्रवृत्ति मूल्य Y_c= 160+140x0= 160

वर्ष 2004, X= 1, प्रवृत्ति मूल्य Y_c= 160+140x1= 300

वर्ष 2010, X= (2010-2003)= 7

वर्ष 2010 (Y_c)= 160+140x7= 160+980 = 1140

अत: वर्ष 2010 के लिए प्रत्याशित मूल्य 1140 होगा।



लघु विधि (Short-cut method):

इस विधि के अन्तर्गत मध्यका वर्ष को मूल वर्ष मानकर X की गणना की जाती है। यदि काल श्रेणी में समयावधि (N) विषम संख्या में दी हुई हो तो ही लघु विधि को प्रयुक्त करना उचित रहेगा।

इस विधि में मध्यका वर्ष को मूल वर्ष मानने के कारण X का योग शून्य होता है और a तथा b का मूल्य प्रत्यक्षत: निम्न प्रकार निर्धारित हो जाता है:-

समीकरण

$$\sum Y = Na + b \sum X$$

चूंकि $\sum X = 0$ है इसलिए $\sum Y = Na$ अथवा $a = \sum Y \div N$

इसी प्रकार समीकरण (ii) के आधार पर b का मूल्य निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है:-

$$\sum XY = a \sum X + b \sum X^2$$

अथवा $b \sum X^2 = \sum XY$

अथवा $b = \sum XY / \sum X^2$

उदाहरण :- ७

उदाहरण ६ में दिये गये समंकों के आधार पर मध्यका वर्ष को मूल मानकर प्रवृत्ति मूल्यों का निर्धारण कीजिए:-

Compute the trend values for the data given in illustration- 6 by taking middle year as origin:

हल (Solution) :

मध्यका वर्ष २००६ को मूल मानकर प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

Years	No. of Scooter Regis (Y)	X (year - 2006)	X^2	XY	Trend Values Y= 580+140X
2003	160	-3	9	-480	580+140x -3 = 160
2004	350	-2	4	-700	580+140x -2 = 300
2005	340	-1	1	-340	580+140x -1 = 440
2006	580	0	0	0	580+140x 0 = 580
2007	770	+1	1	+770	580+140x 1 = 720
2008	910	+2	4	+1820	580+140x 2 = 860
2009	950	+3	9	+2850	580+140x 3 = 1000
N=7	4060 $\sum Y$	0 $\sum X$	28 $\sum X^2$	3920 $\sum XY$	4060 $\sum Y_C$

प्रवृत्ति समीकरण निम्न प्रकार है:-

$$Y_C = a+bX$$

a तथा b स्थिरांक का मूल्य निम्नांकित दो समीकरणों को सरल कर निर्धारित किया जावेगा:

$$\sum Y = Na + b\sum X \quad \text{———— (i)}$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \quad \text{———— (ii)}$$

चूंकि $\sum X = 0$, अत:

$a = \sum Y/N = 4060/7 = 580$, तथा

$b = \sum XY/\sum X^2 = 3920/28 = 140$

प्रवृत्ति समीकरण ($Yc = 580+140x$) में x का मान रख कर प्रवृत्ति मूल्यों का निर्धारण किया जावेगा।

वर्ष २०१० के लिए प्रवृति मूल्य का निर्धारण :

वर्ष २०१० के लिए का x मान = (२०१०-२००६) =४

अत: वर्ष २०१० का अनुमानित मूल्य (Yc) = ५८० + १४० x४ = ५८० + ५६० = ११४०

उदाहरण :- ८

निम्नाकिंत समंको के लिए एक सरल रेखा प्रवृत्ति का निर्धारण न्यूनतम वर्ग विधि से २००४ वर्ष को मूल मान कर कीजिए:-

Fit a straight line trend to the following data by least square method taking 2004 as origin and also find out monthly increase in the producation of sugar:

वर्ष	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2009
चीनी का उत्पादन (००० क्वि. में)	77	88	94	85	91	98	90

चीनी के उत्पादन में मासिक वृद्धि दर को भी ज्ञात कीजिए:–

हल:–**Solution :**

प्रवृत्ति मूल्यों का निर्धारण

वर्ष	उत्पादन (००० क्वि. में) **Y**	(२००४ से विचलन) **X**	**XY**	X^2	प्रवृत्ति मूल्य $Y_C = 88.803+1.38X$
2000	**77**	**-4**	**-308**	**16**	**83.283**
2002	**88**	**-2**	**-176**	**4**	**86.043**
2003	**94**	**-1**	**-94**	**1**	**87.423**
2004	**85**	**0**	**0**	**0**	**88.803**
2005	**91**	**+1**	**+91**	**1**	**90.183**
2006	**98**	**+2**	**+196**	**4**	**91.563**
2009	**90**	**+5**	**+450**	**16**	**95.70**
N=7	$\sum Y = 623$	$\sum X = 1$	$\sum XY = 159$	$\sum X^2 = 51$	$\sum Y_C = 623.001$

प्रवृत्ति समीकरण : $Y_c = a + bX$

'a' तथा 'b' स्थिरांकों का निर्धारण निम्नांकित दो समीकरणों के हल द्वारा किया जावेगा:

$$\sum Y = Na + b\sum X \qquad .....(i)$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \qquad .....(ii)$$

दोनों समीकरणों में ज्ञात मूल्य प्रतिस्थापित करने पर:–

$$623 = 7a + b \qquad .....(i)$$

$$159 = a + 51b \qquad .....(ii)$$

समीकरण (ii) को ७ से गुणा कर समीकरण (i) में से घटाने पर:–

$$623 = 7a + b \qquad ....(i)$$

$$-1113 = 7a + 357b \qquad ......(iii)$$

$$-490 = -356b$$

अथवा $b = 490/356 = 1.38$

समीकरण (i) में b का मान रखने पर :

$$7a + 1.38 = 623$$

अथवा $a = 623-1.38/7 = 88.803$

अतः $Y_C = 88.803 + 1.38X$

उपयुक्त प्रवृत्ति समीकरण में X का मान रख कर विभिन्न वर्षों का प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। जैसे– वर्ष २००० के लिए प्रवृत्ति मूल्य के निर्धारण हेतु X का मान (२०००–२००४) अर्थात – ४ है,

अतः वर्ष २००० का प्रवृत्ति मूल्य $Y_C = 88.803 + (1.38 \times -4)$

$= 83.283$

इसी प्रकार , जब $X = -2$, हो तो

$Y_C = 88.803 + (1.38 \times -2) = 86.043.$

अन्य प्रवृत्ति मूल्यों का निर्धारण भी इसी प्रकार किया गया है।

उत्पादन में मासिक वृद्धि दर की गणना:

वार्षिक वृद्धि दर (b) में में १२ का भाग देकर मासिक वृद्धि दर ज्ञात की जाती है। अत: मासिक वृद्धि दर = $b/12 = 1.38/12 = 0.115$ हजार क्विन्टल।

व्यवसाय में काल श्रेणी का अनुप्रयोग
(Application of Time Series in Business)

काल श्रेणी के विश्लेषण का आर्थिक, व्यावसायिक एवं समाज के सभी क्षेत्रों में बहुत अधिक महत्त्व है। भावी घटनाओं का सही अनुमान लगाने के लिए आर्थिक तथ्यों में होने वाले परिवर्तनों को समझना तथा मूल्यांकन करना आवश्यक है। व्यवसाय में काल श्रेणी की उपयोगिता निम्न कारणों से है:-

i) भूतकालीन व्यवहारों का ज्ञान: काल श्रेणी के विश्लेषण से भूतकालीन व्यवहारों का ज्ञान सरलता से हो सकता है जिसके आधार पर आर्थिक व्यवहारों को नियन्त्रित किया जा सकता है।

ii) भविष्य के बारे में अनुमान: काल श्रेणी विश्लेषण के आधर पर भविष्य की स्थिति का अनुमान लगाकर भावी लाभ कमाये जा सकते है तथा हानियों से बचा जा सकता है।

iii) व्यापार चक्र का अनुमान: काल श्रेणी के विश्लेषण से व्यापार में होने वाले उतार-चढ़ाव का अनुमान लगाकर व्यावसायिक क्रियाओं को नियन्त्रित किया जा सकता है। चक्रीय उच्चावचनों के अध्ययन से व्यावसायिक क्रियाओं को इस प्रकार नियन्त्रित किया जा सकता है। जिससे भावी हानि से बचा जा सके तथा लाभों को बढ़ाया जा सके।

अभ्यासार्थ प्रश्न
SELF EXAMINATION QUESTIONS

वस्तुनिष्ठ उत्तर वाले प्रश्न (Objective Answer Type Question)

निम्नांकित प्रश्नों का सही उत्तर लिखिए:-

1) उपनति का तात्पर्य दीर्घकाल में............................की स्वाभाविक प्रवृत्ति से है।
   (a) केवल वृद्धि (b)) केवल कमी
   (c) या तो वृद्धि या कमी (d)) उपयुर्क्त में कोई भी नहीं ( )

2) मूल समंक .... के बराबर होता है।
   (a) T-S+C-I (b) T÷S X C X I
   (c) T X S+C+I (d) T X S X CX I ( )

3) न्यूतम वर्ग प्रवृत्ति समीकरण $Yc = a + bx$, में यदि 'b' का मान घनात्मक हो तो यह ....को इंगित करता है।
   (a) वृद्धि की प्रवृत्ति (b) कमी की प्रवृत्ति
   (c) किसी भी प्रकार की प्रवृत्ति को नहीं (d) या तो वृद्धि या कमी की प्रवृत्ति ( )

उत्तर : [१ (c), २ (d), ३ (a)]

लघुत्तरात्मक प्रश्न (अधिकतम शब्द सीमा : ५०)

१. काल श्रेणी क्या है ?
२. दीर्घकालीन प्रवृत्ति से आप क्या समझते है ?
३. काल श्रेणी के घटकों को स्पष्ट कीजिए ?
४. काल श्रेणी के यौजय निदर्श का सूत्र लिखिए।
५. दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए अर्द्ध माध्य विधि से आप क्या समझते है ?
६. चल माध्य विधि क्या है ?

७. न्यूनतम वर्ग विधि की मान्यताएं कौनसी है ?

निबन्धात्मक प्रश्न

१. काल श्रेणी क्या है ? काल श्रेणी के घटकों को समझाइये ?

२. काल श्रेणी में अर्द्ध माध्य विधि से प्रवृत्ति ज्ञात करने की प्रक्रिया को समझाइए। अपना उत्तर एक संख्यात्मक प्रश्न की सहायता से समझाइए।

संख्यात्मक प्रश्न

१. निम्नांकित के लिए एक प्रवृत्ति रेखा खींचिए: (अ) मुक्त हस्त पद्धति से (ब) अर्द्ध माध्य विधि से

Years	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Production ('000 qtls.)	280	300	320	240	220	200

(उत्तर: Semi-averages for 2005=300 and for 2008=220)

२. किसी वस्तु की जनवरी २००९ से दिसम्बर २००९ तक की बिक्री निम्न प्रकार थी।
अर्द्ध माध्य विधि से एक प्रवृत्ति रेखा निश्चित कीजिए।

Months	Sales	Months	Sales	Months	Sales	Months	Sales
Jan.	290	April	270	July	230	Oct.	200
Feb.	300	May	280	Aug.	230	Nov.	210
March	280	June	240	Sept.	220	Dec.	200

(उत्तर: : Semi-averages 276.7 in March/April and 215 in Sept./Oct.)

३. निम्नाकिंत समंको से अर्द्ध माध्य विधि द्वारा एक प्रवृत्ति रेखा निर्धारित कीजिए। उस वर्ष की वास्तविक बिक्री ५२० लाख रू. है। वर्ष २३००९ की बिक्री का अनुमान लगाइए तथा दोनों के बीच अन्तर का कारण बताइए।

Years	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Sales (Rs. in Lakhs)	412	438	444	454	470	482	490	500

(उत्तर: Sales by Semi-averages trend line for 2009 is Rs. 518 Lakhs .)

४. निम्नांकित समंको से ३ वर्षीय चल माध्यों को लेकर प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए।

Years	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Profit in Lakh Rs.	27	29	34	52	58	64	93	92	98	102

(उत्तर: 30, 38.33, 48, 58, 71.67, 83, 94.33, 97.33)

५. निम्नांकित समंकों से ४ वर्षीय चल माध्यों द्वारा प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए।

Years	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
Yearly Values	301	454	393	414	422	464	466	492

(उत्तर: 405.6, 422, 432.4, 451.21)

६. एक शक्कर के कारखाने में हुए उत्पादन (हजार मनों में) से संबंधित समंक निम्न प्रकार है:

अ. एक सरल प्रवृत्ति रेखा का निर्धारण कीजिए।

ब. इन समंकों को रेखा चित्र पर अंकित कर प्रवृत्ति रेखा दिखाइए।

Years	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
Production (in 000 mds)	80	90	92	83	94	99	92

(उत्तर = 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96)

७. न्यूनतम वर्ग विधि से सीधी रेखा प्रवृत्ति समीकरण का निर्धारण कीजिए तथा प्रवृत्ति मूल्यों का अनुमान लगाइए:-

Years	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
Values	80	90	92	83	94	99	92	104

(उत्तर: = 91.75 + 1.25 X ; 83, 85.5, 88, 90.5, 93, 95.5, 98, 100.5)